

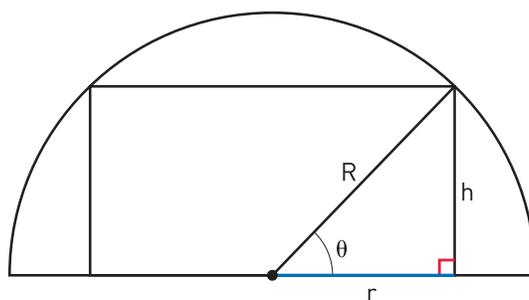
SOLUZIONE DEL QUESITO 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Consideriamo il caso in cui la base superiore del cilindro retto corrispondente alla torta è tangente alla superficie interna della cupola semisferica. Fissata l'altezza, questa torta è la più grande possibile.

Indichiamo i volumi della cupola e della torta con V_{cupola} e V_{torta} . Dobbiamo verificare che $V_{torta} < \frac{3}{5}V_{cupola}$. Questo equivale a mostrare che $\frac{V_{torta}}{V_{cupola}} < \frac{3}{5}$. Cerchiamo il massimo del rapporto tra i volumi della torta e della cupola, mostrando che tale massimo è sempre minore di $\frac{3}{5}$.

La figura mostra una sezione verticale di torta e cupola, con il piano di sezione perpendicolare alla base della cupola e passante per il suo centro.

Indichiamo con R il raggio della cupola semisferica e con r il raggio di base della torta. Consideriamo un angolo ϑ come indicato in figura.



Il metodo più efficiente per risolvere il quesito è considerare come incognita l'altezza h della torta.

Mostriamo la risoluzione anche nel caso in cui si scelgano come incognite il raggio r della torta oppure l'angolo ϑ .

METODO 1: l'incognita è l'altezza h

Il volume della cupola è:

$$V_{cupola} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Scriviamo il volume della torta in funzione di h . R , r e h sono i lati di un triangolo rettangolo, quindi per il teorema di Pitagora si ha $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, con $0 \leq h \leq R$. Calcoliamo il volume della torta:

$$V_{torta} = \pi(\sqrt{R^2 - h^2})^2 \cdot h = \pi(R^2 - h^2) \cdot h.$$

Il rapporto tra i volumi è:

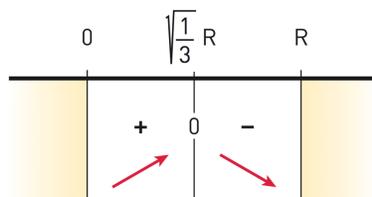
$$f(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2) \cdot h}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \frac{h(R^2 - h^2)}{R^3} = \frac{3}{2} \frac{R^2 h - h^3}{R^3}.$$

Studiamo massimi e minimi di $f(h)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(h) = \frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2).$$

Studiamo il segno di $f'(h)$ con $0 \leq h \leq R$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2) \geq 0 &\rightarrow R^2 - 3h^2 \geq 0 \rightarrow 3h^2 \leq R^2 \rightarrow \\ h^2 \leq \frac{R^2}{3} &\rightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \rightarrow 0 \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R. \end{aligned}$$



Pertanto, per $h = \sqrt{\frac{1}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}R\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R \left(R^2 - \frac{1}{3}R^2\right)}{R^3} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R \left(\frac{2}{3}R^2\right)}{R^3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$

METODO 2: l'incognita è il raggio r

In alternativa, è possibile risolvere il quesito considerando come incognita la variabile r , ovvero il raggio di base della torta. Il volume della cupola non dipende da r :

$$V_{cupola} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Per il teorema di Pitagora si ha $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, con $0 \leq r \leq R$. Calcoliamo il volume della torta in funzione di r :

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Il rapporto tra i volumi è:

$$g(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3r^2\sqrt{R^2 - r^2}}{2R^3}.$$

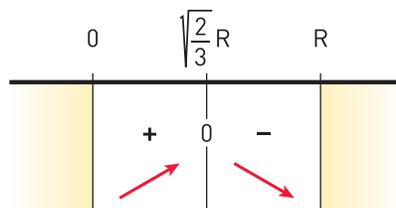
Studiamo massimi e minimi di $g(r)$, con $0 \leq r \leq R$:

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{3}{2R^3} \cdot \left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}}(-2r) \right] = \\ &= \frac{3}{2R^3} \cdot 2r \left(\sqrt{R^2 - r^2} - r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \\ &= \frac{3}{R^3} \cdot r \frac{2(R^2 - r^2) - r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{3}{2R^3} \cdot \frac{r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

Il segno della derivata coincide con quello del numeratore, poiché il denominatore è sempre positivo.

Ricordando che $0 \leq r \leq R$, abbiamo:

$$\begin{aligned} r(2R^2 - 3r^2) \geq 0 &\rightarrow 2R^2 \geq 3r^2 \rightarrow r^2 \leq \frac{2}{3}R^2 \rightarrow \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}R \leq r &\leq \sqrt{\frac{2}{3}}R \rightarrow 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R. \end{aligned}$$



Pertanto, per $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2}}{R^3} = \frac{3\frac{2}{3}R^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2}}{R^3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$

METODO 3: l'incognita è l'angolo ϑ

Il volume della semisfera è

$$V_{cupola} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

e il volume della torta è

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot h.$$

Come mostrato nella figura iniziale, r , R e ϑ sono gli elementi del triangolo rettangolo, quindi:

$$r = R \cos \vartheta \text{ e } h = R \sin \vartheta.$$

Dunque:

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot h = \pi(R \cos \vartheta)^2 \cdot R \sin \vartheta = \pi R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta.$$

Pertanto la funzione che esprime il rapporto tra i volumi è:

$$m(\vartheta) = \frac{V_{torta}}{V_{cupola}} = \frac{\pi R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta.$$

Poiché la figura è simmetrica, possiamo limitare lo studio della funzione all'intervallo $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Studiamo dunque massimi e minimi della funzione $m(\vartheta)$, con $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$m'(\vartheta) = \frac{3}{2}[2 \cos \vartheta (-\sin \vartheta) \cdot \sin \vartheta + \cos^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta] = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta).$$

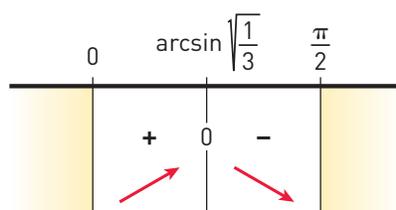
Poiché $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ otteniamo:

$$m'(\vartheta) = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-2 \sin^2 \vartheta + 1 - \sin^2 \vartheta) = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-3 \sin^2 \vartheta + 1).$$

Studiamo il segno della derivata prima in $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Poiché nel primo quadrante si ha $\sin \vartheta \geq 0$ e $\cos \vartheta \geq 0$:

$$\frac{3}{2} \cos \vartheta (-3 \sin^2 \vartheta + 1) \geq 0 \rightarrow -3 \sin^2 \vartheta + 1 \geq 0 \rightarrow$$

$$\sin^2 \vartheta \leq \frac{1}{3} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} \leq \sin \vartheta \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow 0 \leq \vartheta \leq \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}.$$



Dal grafico della derivata osserviamo che per $\vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}$, ovvero per $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{1}{3}}$, il rapporto tra i volumi è massimo.

Poiché:

$$m(\vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = \frac{3}{2} (1 - \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta,$$

il valore massimo del rapporto dei volumi è:

$$m\left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$