SOLUZIONE DEL QUESITO 4
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Sia X una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[0; 2]$ e ha densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3.$$

Per prima cosa verifichiamo che $f(x)$ è effettivamente una funzione densità di probabilità, ovvero che:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 2]$;
- $\int_0^2 f(x)dx = 1$.

Studiamo il segno della funzione $f(x)$:

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \geq 0 \longrightarrow \frac{3}{2}x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \geq 0.$$

Studiamo separatamente i due fattori:

- $\frac{3}{2}x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi in particolare per ogni $x \in [0; 2]$;
- $1 - \frac{1}{2}x \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}x \leq 1 \quad \longrightarrow x \leq 2$.

Abbiamo dimostrato che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0; 2]$.
Verifichiamo la seconda proprietà:

$$\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^2 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^3 dx =$$
$$\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^2 - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{4} \cdot x^4\right]_0^2 =$$
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{4} = 4 - 3 = 1.$$

Possiamo quindi concludere che $f(x)$ è una funzione densità di probabilità.
Il valore medio dei numeri generati è:

$$\begin{aligned}M(X) = &\int_0^2 x \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right) dx = \\ &\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^4 dx = \\ &\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_0^2 - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{5}\cdot x^5\right]_0^2 = \frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot\frac{32}{5} = \\ &6 - \frac{24}{5} = \frac{30-24}{5} = \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

La distribuzione dei numeri generati è continua, quindi la probabilità di generare un numero esatto, come $\frac{4}{3}$, è nulla.
Infatti:

$$p\left(X = \frac{4}{3}\right) = p\left(\frac{4}{3} \le X \le \frac{4}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x)dx = 0.$$

Questa osservazione ci permette anche di dire che $p(X < k) = p(X \le k)$, per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.
Poiché due estrazioni consecutive di un numero sono eventi indipendenti, la probabilità che il secondo numero generato sia minore di 1 è:

$$\begin{aligned}p(X<1) = p(X \le 1) = &\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right) dx = \\ &\frac{3}{2}\int_0^1 x^2 dx - \frac{3}{4}\int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^1 - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_0^1 = \\ &\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{8-3}{16} = \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

