SOLUZIONE DEL QUESITO 9
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Studiamo la funzione $f(x) = \arctan(x) + x^3 + e^x$. Gli zeri di questa funzione corrispondono alle soluzioni dell'equazione data.
Osserviamo che f è continua e strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ poiché somma di tre funzioni continue e strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, è illimitata sia inferiormente sia superiormente, infatti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \infty + 0 = -\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \infty + \infty = +\infty.$$

Quindi, f è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}$. La biettività assicura che f assume tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$ una e una sola volta. In particolare, esiste esattamente un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Un metodo alternativo per dedurre l'**esistenza** della soluzione è il seguente. Per il teorema di permanenza del segno applicato ai limiti calcolati sopra, esistono $a < 0$ e $b > 0$ tali che $f(x) < 0$ per ogni $x \in]-\infty; a]$ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [b; +\infty[$. Nell'intervallo $[a; b]$ valgono le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri che assicura che l'equazione ammette soluzione.