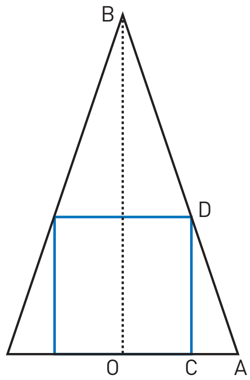
Svolgimento del quesito 1

1 Il testo del quesito non specifica se si tratta di coni e cilindri retti o obliqui. Osserviamo che, per il principio di Cavalieri, le formule del volume di coni e cilindri di data altezza e raggio di base non cambiano dal caso retto al caso obliquo. Possiamo quindi analizzare la situazione nel caso retto; i risultati ottenuti saranno validi anche per il caso obliquo.

Consideriamo dunque un cono retto di altezza H e raggio di base R, con inscritto un cilindro retto di altezza h e raggio di base r. Deve essere $0 < r < R$.

In figura è descritta una sezione del cono e del cilindro ottenuta con un piano passante per l'asse comune.

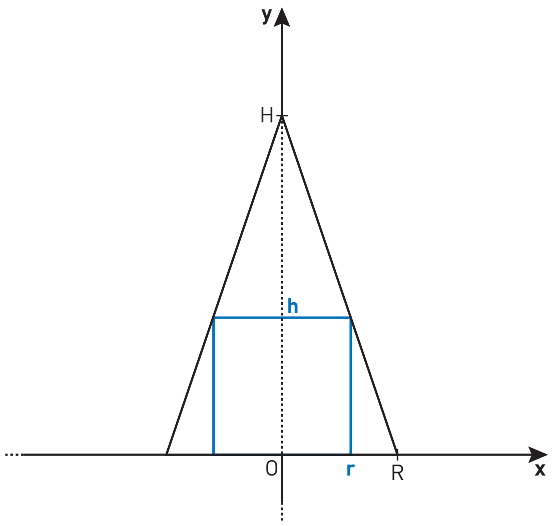


Possiamo determinare h sfruttando la similitudine dei triangoli OAB e CAD.

Otteniamo:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{CD}{CA} \quad \rightarrow \quad \frac{H}{R} = \frac{h}{R-r} \quad \rightarrow \quad h = \frac{H}{R}(R-r) = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

In alternativa, per ricavare h, potevamo inserire la figura precedente in un sistema di assi cartesiani, come mostrato di seguito; abbiamo indicato sugli assi le ascisse e le ordinate dei punti corrispondenti.



Il lato obliquo AB, corrispondente all'apotema del cono, appartiene allora alla retta di equazione:

$$y = H - \frac{H}{R}x.$$

Per $x = r$ otteniamo, come prima, l'altezza h del cilindro:

$$h = H - \frac{H}{R}r = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Il volume del cilindro è dato da:

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = r^2 \cdot \pi \cdot h = \pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Il volume del cono è dato da:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot H = \frac{\pi}{3}HR^2.$$

Il rapporto fra i due volumi è:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{\pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\frac{\pi}{3}HR^2} = \frac{3r^2}{R^2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{3r^2(R-r)}{R^3} = \frac{3}{R^3}\left(Rr^2 - r^3\right).$$

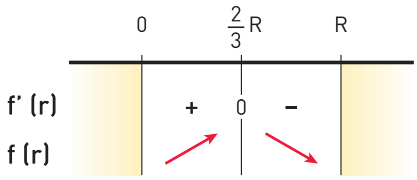
Valutiamo qual è il massimo assunto da questo rapporto, studiando il segno della derivata prima della funzione $f(r) = \frac{3}{R^3}\left(Rr^2 - r^3\right)$:

$$f'(r) = \frac{3}{R^3}\left(2Rr - 3r^2\right);$$

$$f'(r) > 0 \quad \to \quad 2Rr - 3r^2 > 0 \quad \to \quad r(2R - 3r) > 0.$$

Poiché $r > 0$, si ha:

$$r < \frac{2}{3}R.$$



Il rapporto è massimo per $r = \frac{2}{3}R$ e in questo caso vale:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{3}{R^3}\left[R\left(\frac{2}{3}R\right)^2 - \left(\frac{2}{3}R\right)^3\right] = \frac{3}{R^3}R^3\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right) = 3 \cdot \frac{12-8}{27} = \frac{4}{9}.$$

Poiché $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$, il volume del cilindro inscritto è sempre minore della metà del volume del cono.

