ESAME DI STATO 2023 ◇ PROVA DI MATEMATICA

Svolgimento del problema 1

1 **Parte a**

La prima equazione, $y = a(x + 2)^2$, rappresenta una parabola di vertice $(-2; 0)$. Possiamo determinare il valore del parametro a imponendo il passaggio per il punto $(0; 1)$:

$$1 = a(0 + 2)^2 \to a = \frac{1}{4}.$$

L'equazione dell'arco Γ_1 è quindi $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$.

La seconda equazione rappresenta una circonferenza di centro $(0; 0)$ e raggio $r = \sqrt{-b}$, con $b < 0$.

Determiniamo b imponendo che sia $r = 1$:

$$\sqrt{-b} = 1 \to b = -1.$$

Per determinare l'equazione dell'arco Γ_2 esplicitiamo y sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1$: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

La terza equazione, $x^2 - y^2 + c = 0$, per $c \neq 0$ rappresenta un'iperbole equilatera, centrata, con i fuochi sull'asse x se $c < 0$ e sull'asse y se $c > 0$, e con i vertici in $(\pm\sqrt{-c}; 0)$ se $c < 0$ e $(0; \pm\sqrt{c})$ se $c > 0$.

Poiché Γ_3 è un arco di iperbole con un vertice in $(1; 0)$, deve essere $\sqrt{-c} = 1 \to c = -1$.

Esplicitando rispetto a y, sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 1 \leq x \leq 2$, l'equazione si scrive $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

L'espressione analitica di f risulta infine

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 2)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

La funzione definita a tratti $f(x)$ è definita e continua in $[-2; 2]$. Calcoliamo la sua derivata $f'(x)$ osservando subito che $f(x)$ è derivabile nei punti interni di ciascun tratto.

Per $-2 < x < 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{4} \cdot 2(x + 2) = \dfrac{1}{2}(x + 2)$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]-2; 0[$.

Per $0 < x < 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]0; 1[$.

Per $1 < x < 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]1; 2[$.

Per quanto riguarda la derivabilità nei punti estremi dell'intervallo $[-2;2]$, osserviamo inoltre che esiste la derivata destra in $x=-2$, che vale $f'_+(-2)=\frac{1}{2}(-2+2)=0$, ed esiste la derivata sinistra in $x=2$, che vale $f'_-(2)=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Analizziamo ora la derivabilità in $x=0$ e $x=1$.

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}(x+2)=1$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

La funzione non è derivabile in $x=0$, perché la derivata sinistra e destra sono finite, ma diverse. Si tratta quindi di un punto angoloso. Nel punto $(0;1)$ la funzione non ammette quindi una tangente, ma possiamo scrivere le equazioni della tangente sinistra e destra:

$$\text{Tangente sinistra: } m=f'_-(0)=1 \to y-1=1(x-0)\to y=x+1$$
$$\text{Tangente destra: } m=f'_+(0)=1 \to y-1=0\to y=1.$$

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x=1$:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

La funzione $y=f(x)$ non è quindi derivabile in $x=1$, dove il grafico ha una cuspide con tangente verticale di equazione $x=1$.

La funzione $f(x)$ è quindi derivabile in $[-2;2]-\{0;1\}$, con derivata

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+2) & \text{se } -2\le x<0\\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0<x<1\\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 1<x\le 2.\end{cases}$$

Restano da calcolare le tangenti nei due punti di ascissa -2 e 2. Si ha $f(-2)=0$ e $f(2)=\sqrt{3}$.

Dall'equazione della derivata si ha $f'(-2)=0$, e quindi la tangente in $(-2;0)$ ha equazione $y=0$.

Analogamente, abbiamo $f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

La tangente in $(2;\sqrt{3})$ ha equazione

$$y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2)\to y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Parte b

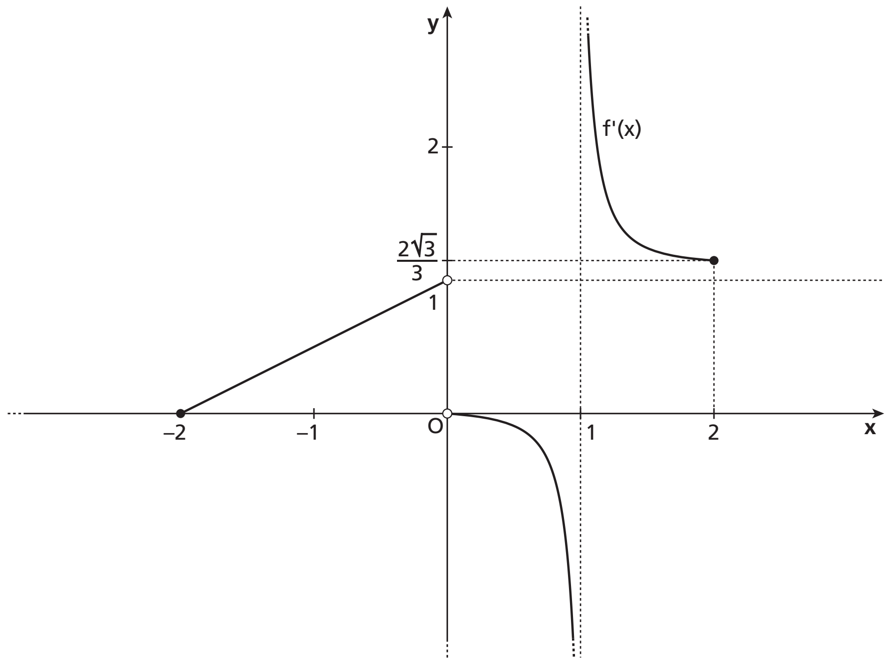
Dallo studio di funzione che abbiamo svolto nella Parte a, il dominio di $f'(x)$ risulta $[-2; 2] - \{0; 1\}$. Abbiamo inoltre ricavato le seguenti proprietà:

$$f'(-2) = 0; \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty; \quad f'(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1,15.$$

- Nel tratto $-2 < x < 0$, $y = f(x)$ è monotòna crescente e convessa, quindi $f'(x)$ è positiva e crescente.
  In particolare, $y = f'(x)$ è un segmento di retta perché derivata di un polinomio di secondo grado.
- Nel tratto $0 < x < 1$, $y = f(x)$ è monotòna decrescente e concava, quindi $f'(x)$ è negativa e decrescente.
- Nel tratto $1 < x \leq 2$, $y = f(x)$ è monotòna crescente e concava, quindi $y = f'(x)$ è positiva e decrescente.

Il grafico di $f'(x)$ risulta:



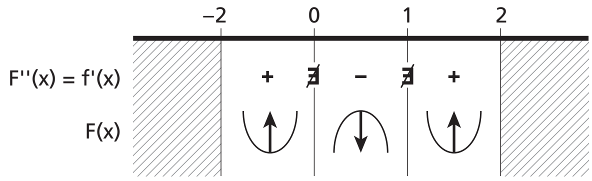
Analizziamo la concavità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

Poiché $f(x)$ è continua su $[-2; 2]$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$ in $[-2; 2]$.

Poiché $f(x)$ è derivabile in $[-2; 2] - \{0; 1\}$, vale anche $F''(x) = f'(x)$ in $[-2; 2] - \{0; 1\}$.

Dal grafico ottenuto nella Parte b, possiamo analizzare il segno di $F''(x)$:

$F(x)$ è convessa per $-2 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 2$; è concava per $0 < x < 1$.



Poiché $F(x)$ è continua in $x = 0$ e $x = 1$ e la funzione cambia concavità, questi sono punti di flesso.

Parte c

Dal grafico della funzione $f(x)$ si osserva che

$$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2, \quad g : [-2; 0] \to [0; 1]$$

è iniettiva (in quanto monotòna crescente) e suriettiva, e quindi invertibile.

Ricaviamo l'espressione analitica dell'inversa esplicitando x:

$$4y = (x+2)^2 \to x + 2 = \pm\sqrt{4y} \,(\text{poiché } y \geq 0)$$
$$x = -2 \pm \sqrt{4y} \to x = -2 + \sqrt{4y} \,(\text{poiché } -2 \leq x \leq 0)$$

Esprimendo la variabile indipendente con x:

$$h(x) = -2 + 2\sqrt{x}, \quad h[0; 1] \to [-2; 0]$$

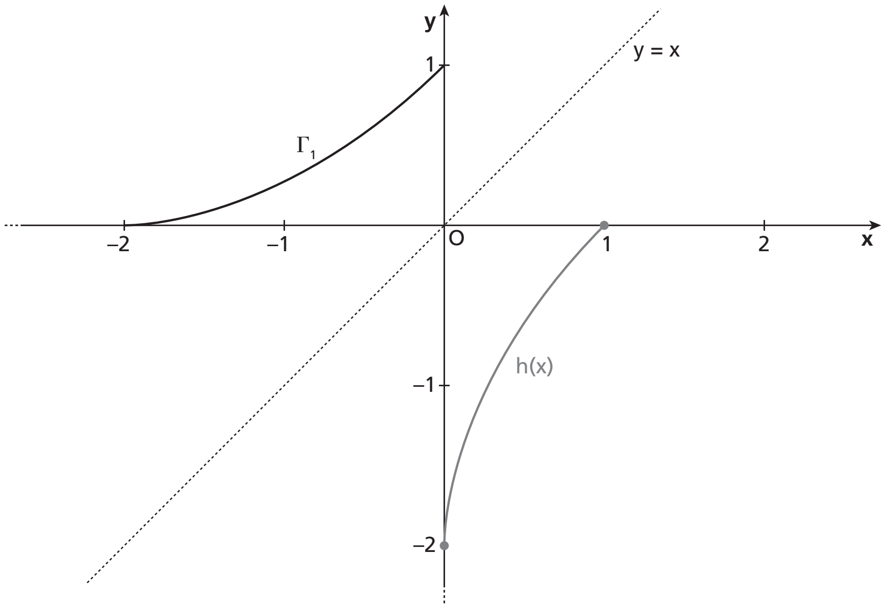
La funzione $y = h(x)$ è derivabile in $]0; 1]$ in quanto $y = g(x)$ è derivabile in $]-2; 0]$ con $y'(x) \neq 0$.

Per il teorema della derivata della funzione inversa,

$$h'_+(0) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{g'(x)} = +\infty,$$

quindi h non è derivabile in 0.

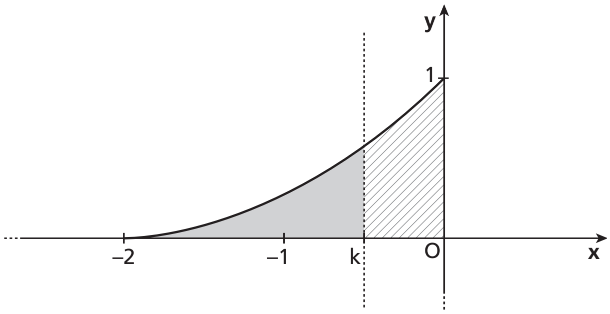
Il grafico di $h(x)$, in quanto funzione inversa di $g(x)$, è il simmetrico di Γ_1 rispetto alla bisettrice degli assi cartesiani:



Parte d

Poiché la funzione è positiva su tutto l'intervallo, possiamo calcolare l'area con l'integrale. Calcoliamo l'area di S:

$$A_S = \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}.$$



Cerchiamo il valore di k per cui

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{k} = \frac{1}{4}\frac{(k+2)^3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\frac{(k+2)^3}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow (k+2)^3 = 4 \rightarrow k = -2 + \sqrt[3]{4}.$$

