Svolgimento del problema 2

2 Parte a

Posto $a \neq 0$, il dominio della funzione razionale fratta

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

è determinato dai valori di x che non annullano il denominatore.

Se $a < 0$, il denominatore non si annulla per alcun valore di x; il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e la funzione non presenta punti di singolarità o discontinuità.

Se $a > 0$, otteniamo:

$$x^2 - a \neq 0 \to x^2 \neq a \to x \neq \pm\sqrt{a},$$

il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Nell'ipotesi $a > 0$, dunque, abbiamo due punti di singolarità $x = -\sqrt{a}$ e $x = \sqrt{a}$; classifichiamoli calcolando i limiti per x che tende a tali punti.

Iniziamo calcolando il limite per $x \to (-\sqrt{a})^-$.

$$\lim_{x\to(-\sqrt{a})^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x\to(-\sqrt{a})^-} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

- Il fattore x tende a $-\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore $(x - a)$ tende a $-\sqrt{a} - a < 0$.
- Il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a $-2\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore $(x + \sqrt{a})$ tende a 0^-.

Il limite è dunque $+\infty$.

Ragioniamo in modo simile per $x \to (-\sqrt{a})^+$.

$$\lim_{x\to(-\sqrt{a})^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x\to(-\sqrt{a})^+} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

- Il fattore x tende a $-\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore $(x - a)$ tende a $-\sqrt{a} - a < 0$.
- Il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a $-2\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore$(x + \sqrt{a})$ tende a 0^+.

Il limite è dunque $-\infty$.

I due limiti sono infiniti con segno diverso, quindi $x = -\sqrt{a}$ è un punto di singolarità di II specie (per $a > 0$).

Vediamo ora il limite per $x \to \sqrt{a}^-$.

$$\lim_{x\to\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x\to\sqrt{a}^-} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

Distinguiamo i casi $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = 1$.

Se $0 < a < 1$ allora $\sqrt{a} > a$ e otteniamo che:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x - a)$ tende a $\sqrt{a} - a > 0$;
- il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a 0^-;
- il fattore $(x + \sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $-\infty$.

Se $a > 1$ allora $\sqrt{a} < a$ e otteniamo che:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x - a)$ tende a $\sqrt{a} - a < 0$;
- il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a 0^-;
- il fattore $(x + \sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $+\infty$.

Se $a = 1$, il limite diventa

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Passiamo al limite per $x \to \sqrt{a}^+$.

$$\lim_{x\to\sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x\to\sqrt{a}^+} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

Distinguiamo ancora i casi $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = 1$.

Se $0 < a < 1$ allora $\sqrt{a} > a$ e otteniamo:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x - a)$ tende a $\sqrt{a} - a > 0$;
- il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a 0^+;
- il fattore $(x + \sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $+\infty$.

Se $a > 1$ allora $\sqrt{a} < a$ e otteniamo:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x - a)$ tende a $\sqrt{a} - a < 0$;
- il fattore $(x - \sqrt{a})$ tende a 0^+;
- il fattore $(x + \sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $-\infty$.

Se $a = 1$, come prima il limite risulta $\frac{1}{2}$.

Riassumendo:

- se $0 < a < 1$, $\lim_{x\to(\sqrt{a})^-} f_a(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(\sqrt{a})^+} f_a(x) = +\infty$, $x = \sqrt{a}$ è punto di singolarità di II specie;
- se $a > 1$, $\lim_{x\to(\sqrt{a})^-} f_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(\sqrt{a})^+} f_a(x) = -\infty$, $x = \sqrt{a}$ è punto di singolarità di II specie;
- se $a = 1$, $\lim_{x\to(\sqrt{a})^-} f_a(x) = \lim_{x\to(\sqrt{a})^+} f_a(x) = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{a}$ è punto di singolarità eliminabile.

Per quanto riguarda gli asintoti verticali, abbiamo dunque ricavato che:

- $x = -\sqrt{a}$ è asintoto verticale, da sinistra e da destra, per ogni $a > 0$;
- $x = \sqrt{a}$ è asintoto verticale, da sinistra e da destra, per $0 < a < 1$ e per $a > 1$.

Dal limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1$$

otteniamo che $y = 1$ è asintoto orizzontale per $f_a(x)$ per ogni valore di $a \neq 0$.

Parte b

Poniamo $a \neq 1$ (e ricordiamo che è sempre $a \neq 0$).

Verifichiamo che $f_a(x)$ interseca l'asintoto orizzontale $y = 1$:

$$f_a(x) = 1 \to \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} - 1 = 0 \to \frac{x^2 - ax - x^2 + a}{x^2 - a} = 0 \to a - ax = 0 \to a(1-x) = 0 \to x = 1.$$

Il valore $x = 1$ è accettabile anche nel caso $a > 0$ e $D_{f_a} : x \neq \pm a$ perché $a \neq 1$ per ipotesi.

Il grafico Ω_a interseca quindi l'asintoto orizzontale in $(1; 1)$ per ogni a, $a \neq 0 \wedge a \neq 1$. Poiché $f_a(0) = 0$, il grafico Ω_a passa effettivamente per l'origine del sistema di riferimento $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico Ω_a nell'origine; calcoliamo la derivata prima di $f_a(x)$ per ricavare il coefficiente angolare della retta tangente:

$$f_a'(x) = \frac{(2x - a)(x^2 - a) - (x^2 - ax)(2x)}{(x^2 - a)^2} = \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2}$$

da cui:

$$f_a'(x) = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}.$$

Il dominio di $f_a'(x)$ è:

- $\mathbb{R}$ se $a < 0$,
- $\mathbb{R} - \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ se $a > 0$.

Poiché $f_a'(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1$, la retta tangente al grafico di Ω_a nell'origine ha sempre coefficiente angolare 1 e dunque l'equazione di tale retta tangente, per ogni a diverso da 0 e 1, è: $y = x$.

Parte c

Consideriamo $a < 1$ (e sempre $a \neq 0$).
Il denominatore di $f_a'(x)$ è sempre positivo sul dominio f_a', quindi il segno della derivata prima è determinato dal segno del numeratore:

$$f_a'(x) > 0 \rightarrow a(x^2 - 2x + a) > 0.$$

Per quanto riguarda l'equazione associata, poiché $\Delta = 4(1 - a) > 0$, troviamo:

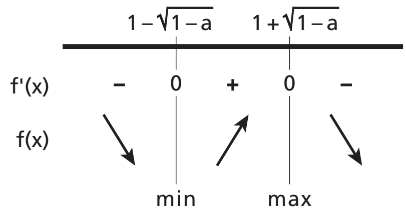
$$x^2 - 2x + a = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - a}$$

e quindi:

$$x^2 - 2x + a > 0 \rightarrow x < 1 - \sqrt{1 - a} \vee x > 1 + \sqrt{1 - a},$$

$$x^2 - 2x + a < 0 \rightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$$

Consideriamo anche il fattore a e distinguiamo due casi. Se $a < 0$,
$f_a'(x) > 0 \rightarrow a(x^2 - 2x + a) > 0 \rightarrow x^2 - 2x + a < 0 \rightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$;
$f_a'(x) < 0 \rightarrow a(x^2 - 2x + a) < 0 \rightarrow x^2 - 2x + a > 0 \rightarrow x < 1 - \sqrt{1 - a} \vee x > 1 + \sqrt{1 - a}$.



Se $0 < a < 1$,
$f_a'(x) > 0 \rightarrow a(x^2 - 2x + a) > 0 \rightarrow x^2 - 2x + a > 0 \rightarrow x < 1 - \sqrt{1 - a} \vee x > 1 + \sqrt{1 - a}$;
$f_a'(x) < 0 \rightarrow a(x^2 - 2x + a) < 0 \rightarrow x^2 - 2x + a < 0 \rightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$.
In questo caso dobbiamo considerare che la funzione non è definita in $x = \pm\sqrt{a}$. Per determinare gli intervalli di monotonia dobbiamo ordinare i valori di $\pm\sqrt{a}$ e $1 \pm \sqrt{1 - a}$. Abbiamo:

$$-1 < -\sqrt{a} < 0;$$

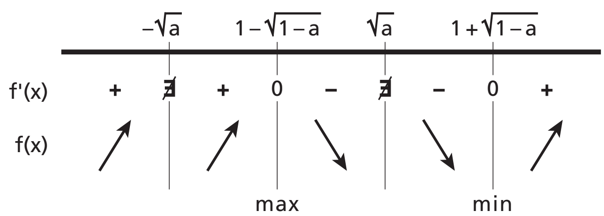
$$0 < \sqrt{a} < 1;$$

$$0 < 1 - \sqrt{1 - a} < 1;$$

$$1 < 1 + \sqrt{1 - a} < 2.$$

Rimane da determinare il maggiore tra $\sqrt{a}$ e $1-\sqrt{1-a}$. Mostriamo che $\sqrt{a} > 1-\sqrt{1-a}$:

$$\sqrt{a}+\sqrt{1-a} > 1$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{1-a}\right)^2 > 1^2$$
$$a+2\sqrt{a(1-a)}+1-a > 1$$
$$2\sqrt{a(1-a)} > 0 \qquad \text{vera } \forall a \in]0,1[.$$



In particolare, se consideriamo $a=-1$, otteniamo la funzione

$$f(x) = f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}.$$

Studiamo la funzione $f(x)$, avvalendoci anche dei risultati già ottenuti.
Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione non è pari né dispari, infatti

$$f(-x) = \frac{x^2-x}{x^2+1}$$

e quindi $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

Troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$f(x)=0 \rightarrow x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x=0 \vee x=-1.$$

Determiniamo ora il segno della funzione. Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi il segno è individuato dal denominatore:

$$f(x) > 0 \rightarrow x^2-x > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 0.$$

Il grafico presenta l'asintoto orizzontale $y=1$, che interseca in $(1;1)$.

Studiamo ora la monotonia della funzione: la funzione è crescente per $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$, decrescente per $x < 1-\sqrt{2} \vee x > 1+\sqrt{2}$. Abbiamo quindi un punto di minimo relativo in $x = 1-\sqrt{2} \simeq -0,41$, di ordinata $f(1-\sqrt{2}) \simeq -0,2$.
Analogamente, abbiamo un punto di massimo relativo in $x = 1+\sqrt{2} \simeq 2,41$, di ordinata $f(1+\sqrt{2}) \simeq 1,2$.

La funzione ammette tangente obliqua di equazione $y=x$ nell'origine.

Procediamo a calcolare la derivata seconda di $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{(2x-2)(x^2+1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \\
&= -\frac{2(x^2+1)[(x-1)(x^2+1)-2x(x^2-2x-1)]}{(x^2+1)^4} = \\
&= -\frac{2[(x-1)(x^2+1)-2x(x^2-2x-1)]}{(x^2+1)^3} = \\
&= -\frac{2}{(x^2+1)^3}(x^3+x-x^2-1-2x^3+4x^2+2x) = \\
&= -\frac{2}{(x^2+1)^3}(-x^3+3x^2+3x-1) = \frac{2}{(x^2+1)^3}(x^2-4x+1)(x+1).
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo fattorizzato il polinomio di terzo grado con Ruffini.

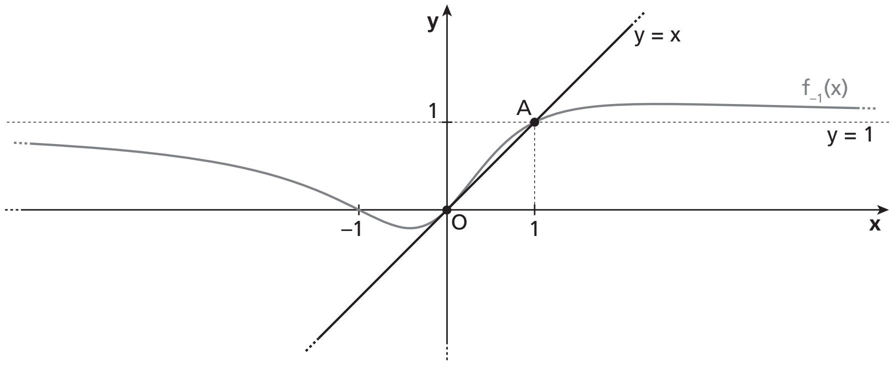
	1	–3	–3	1
–1		–1	4	–1
	1	–4	1	0

Quindi, la derivata seconda si annulla in $x_1 = -1$ e nelle radici di x^2-4x+1, cioè in $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. Studiamo il segno della derivata seconda con il quadro dei segni.

		–1		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
x + 1	–	0	+		+		+
x^2 – 4x + 1	+		+	0	–	0	+
f''	–	0	+	0	–	0	+
f							

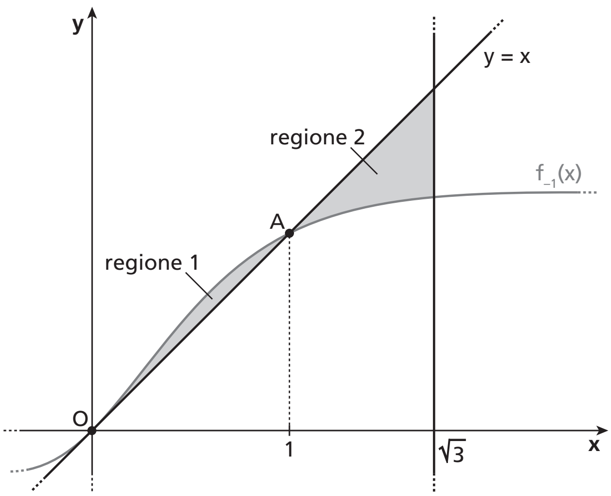
La funzione rivolge la concavità verso l'alto in $-1 < x < 2-\sqrt{3}$ e in $x > 2+\sqrt{3}$, mentre rivolge la concavità verso il basso in $x < -1$ e in $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$. La funzione presenta tre flessi in $x_1 = -1$ e in $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Tracciamo un grafico probabile di $f(x)$.



Parte d

Rappresentiamo più in dettaglio la parte di grafico compresa fra $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$.



Per quanto riguarda la regione di cui occorre calcolare l'area, la richiesta dell'esercizio si presta a due interpretazioni: o la regione richiesta è costituita dalla sola regione 2 in figura, oppure dall'unione delle due regioni 1 e 2. Calcoliamo nel seguito l'area di entrambe le regioni e, nel caso della seconda interpretazione, la somma delle due aree.

Per $0 < x < 1$ la funzione $f(x)$ sta al di sopra della retta tangente $y = x$, per $x > 1$ la funzione sta al di sotto della retta tangente. Verifichiamolo per via analitica, risolvendo la disequazione:

$$f(x) > x \to \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} > x \to \frac{x^2 + x - x^3 - x}{x^2 + 1} > 0 \to -x^3 + x^2 > 0 \to x^2(1 - x) > 0 \to x < 1.$$

L'area racchiusa dal grafico della funzione e dalla retta tangente in $0 < x < 1$ si può calcolare con l'integrale definito:

$$\text{area}_1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} - x \right) dx = \int_0^1 \frac{-x^3 + x^2}{x^2 + 1}\, dx.$$

La funzione integranda è una funzione razionale fratta con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Eseguiamo la divisione.

$-x^3$	$+x^2$			x^2+1
x^3		$+x$		$-x+1$
//	x^2	$+x$		
	$-x^2$		-1	
	//	x	-1	

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{-x^3+x^2}{x^2+1} = (1-x) + \frac{x-1}{x^2+1} = (1-x) - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$$

e l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\text{area}_1 &= \int_0^1 \frac{-x^3+x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [\arctan x]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Analogamente, l'area della regione 2, compresa tra la retta tangente e grafico per $1 < x < \sqrt{3}$, è data da:

$$\text{area}_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3-x^2}{x^2+1}\,dx.$$

Osserviamo che la funzione integranda è l'opposta di quella dell'integrale precedente, quindi:

$$\begin{aligned}
\text{area}_2 &= \int_1^{\sqrt{3}} (x-1)\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{\sqrt{3}} + [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \\
&= 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

(Nell'ultimo passaggio abbiamo trasformato $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$).

Riassumendo:

- $\text{area}_2 = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0,18$;
- $\text{area}_1 + \text{area}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \simeq 0,24$.