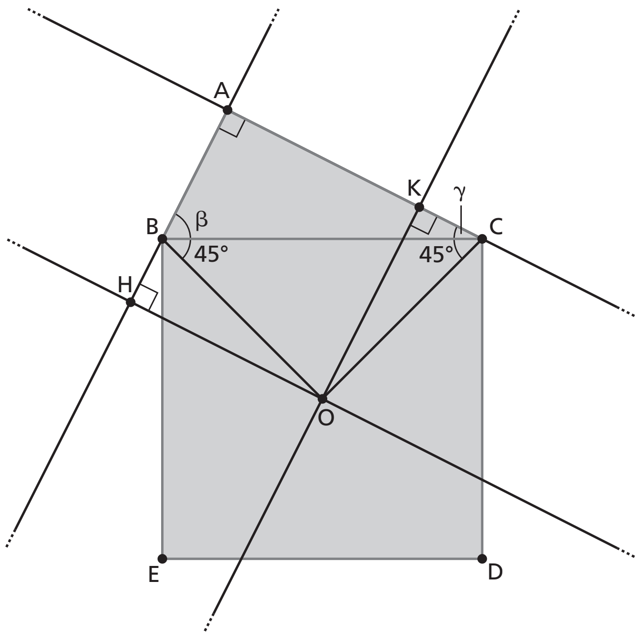
SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023
Svolgimento

Questo 1

Soluzione sintetica

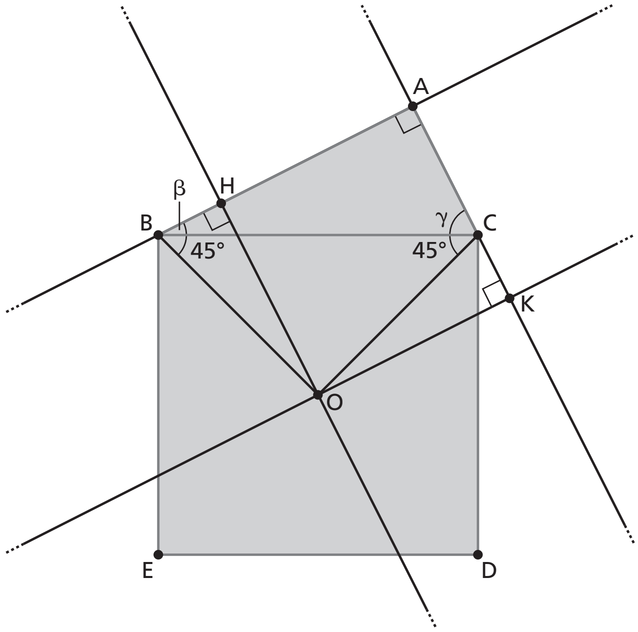


Tracciamo le perpendicolari ad AB e AC passanti per O, e chiamiamo rispettivamente H e K i punti di intersezione. Dimostrare che O è equidistante da AB e da AC equivale a dimostrare che $OH \cong OK$. Siano inoltre $\gamma = A\hat{C}B$ e $\beta = A\hat{B}C = 90° - \gamma$. Consideriamo i triangoli OHB e OKC e dimostriamo che sono congruenti.

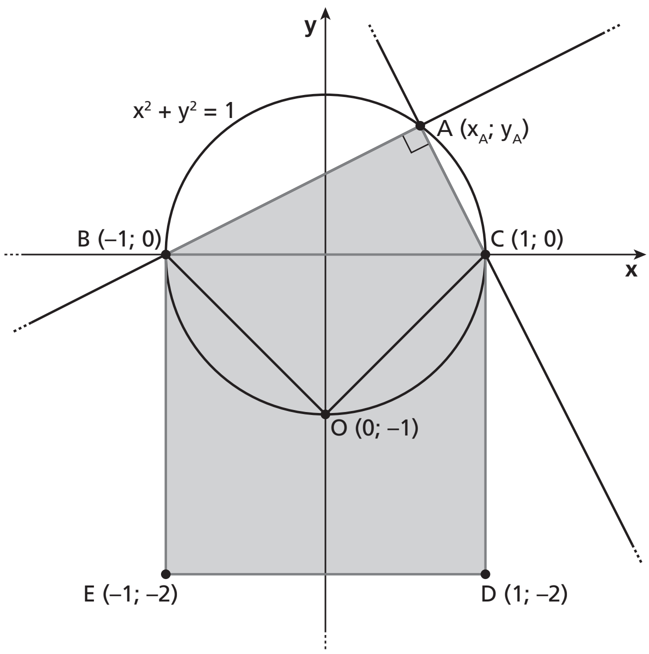
- $OB \cong OC$ perché sono metà delle diagonali BD e CE del quadrato, che sono congruenti.
- $O\hat{H}B \cong O\hat{K}C$ perché angoli retti.
- $O\hat{C}K \cong O\hat{B}H$. Infatti, $O\hat{C}K = \gamma + 45°$ e $O\hat{B}H = 180° - (\beta + 45°) = 180° - (90° - \gamma + 45°) = \gamma + 45°$.

I triangoli rettangoli OHB e OKC sono quindi congruenti per il criterio ipotenusa-angolo, e di conseguenza $OH \cong OK$.
Osserviamo che la precedente dimostrazione vale nel caso in cui $\beta \geq \gamma$. Nel caso in cui $\beta < \gamma$, vale $O\hat{B}H = \beta + 45°$ e $O\hat{C}K = 180° - (\gamma + 45°) = 180° - (90° - \beta + 45°) = \beta + 45°$.

© Zanichelli 2023



Soluzione analitica



Usando traslazioni, rotazioni e omotetie, possiamo posizionare i vertici B e C nei punti $(-1; 0)$ e $(1; 0)$, e il vertice A nel semipiano $y > 0$. Queste trasformazioni non modificano gli angoli né i rapporti tra le lunghezze, quindi la dimostrazione della tesi ha validità generale.

Osserviamo ora che, visto che $B\hat{A}C$ è retto, il punto A si trova sulla semicirconferenza di diametro BC nel semipiano $y > 0$. La circonferenza di diametro BC ha centro $O(0; 0)$ e raggio $r = 1$, quindi la sua equazione è $x^2 + y^2 = 1$. Quindi, se $A(x_A; y_A)$, vale $y_A > 0$ e $x_A^2 + y_A^2 = 1$.

 © Zanichelli 2023

Troviamo ora le equazioni delle rette AB e AC.

$$AB : \frac{y-0}{y_A-0} = \frac{x+1}{x_A+1}$$

$$y_A x - (x_A+1)y + y_A = 0$$

$$AC : \frac{y-0}{y_A-0} = \frac{x-1}{x_A-1}$$

$$y_A x - (x_A-1)y - y_A = 0$$

Dobbiamo ora dimostrare che $d(O;AB) = d(O;AC)$; poiché le distanze sono positive, questo equivale a dimostrare che $[d(O;AB)]^2 = [d(O;AC)]^2$.

$$[d(O;AB)]^2 = \left(\frac{|y_A \cdot 0 - (x_A+1)\cdot(-1) + y_A|}{\sqrt{y_A^2 + (x_A+1)^2}}\right)^2$$

$$= \frac{(x_A+y_A+1)^2}{y_A^2+(x_A+1)^2}$$

$$= \frac{x_A^2+y_A^2+1+2x_Ay_A+2x_A+2y_A}{y_A^2+x_A^2+2x_A+1}$$

$$= \frac{2+2x_Ay_A+2x_A+2y_A}{2x_A+2}, \qquad \text{poiché } x_A^2+y_A^2=1$$

$$= \frac{2(x_A+1)(y_A+1)}{2(x_A+1)}$$

$$= y_A+1$$

 © Zanichelli 2023

$$
\begin{aligned}
[d(O;AC)]^2 &= \left(\frac{|y_A \cdot 0 - (x_A - 1) \cdot (-1) - y_A|}{\sqrt{y_A^2 + (x_A - 1)^2}}\right)^2 \\
&= \frac{(x_A - y_A - 1)^2}{y_A^2 + (x_A - 1)^2} \\
&= \frac{x_A^2 + y_A^2 + 1 - 2x_A y_A - 2x_A + 2y_A}{y_A^2 + x_A^2 - 2x_A + 1} \\
&= \frac{2 - 2x_A y_A - 2x_A + 2y_A}{-2x_A + 2}, \qquad \text{poiché } x_A^2 + y_A^2 = 1 \\
&= \frac{2(1 - x_A)(y_A + 1)}{2(1 - x_A)} \\
&= y_A + 1
\end{aligned}
$$

Quindi $[d(O;AB)]^2 = [d(O;AC)]^2$, da cui $d(O;AB) = d(O;AC)$.

 © Zanichelli 2023