SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023

Svolgimento

Quesito 3

Determiniamo l'equazione della retta r, passante per $A(1;-2;0)$ e $B(2;3;-1)$ in forma parametrica. Il vettore $\overrightarrow{AB}$ ha componenti:

$$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1;5;-1).$$

Pertanto, la retta r ha la seguente equazione:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Poiché la superficie sferica è tangente alla retta r, il suo raggio R sarà pari alla distanza fra il suo centro $C(1;-6;7)$ e la retta r. Per calcolare la distanza fra C ed r bisogna determinare l'equazione del piano α passante per C e perpendicolare alla retta r. Il piano α ha equazione:

$$\alpha : 1(x-1) + 5(y+6) - 1(z-7) = 0 \rightarrow \alpha : x + 5y - z + 36 = 0.$$

Determiniamo quindi le coordinate del punto d'intersezione fra il piano α e la retta r, che indichiamo con H:

$$H: \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases} \rightarrow 1 + t - 10 + 25t + t + 36 = 0 \rightarrow 27t = -27 \rightarrow t = -1.$$

Sostituiamo $t = -1$ nell'equazione della retta e otteniamo le coordinate del punto H:

$$H(0;-7;1).$$

Calcoliamo la distanza $\overline{CH}$:

$$\overline{CH} = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2 + (z_C - z_H)^2} = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}.$$

La distanza $\overline{CH}$ coincide con il raggio R della superficie sferica, che avrà dunque equazione:

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0.$$