SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023
Svolgimento

Quesito 4

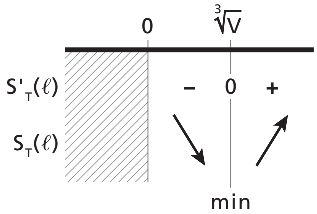
Indichiamo con l ($l > 0$) il lato della base quadrata del parallelepipedo.
Dalla formula del volume $V = l^2 \cdot h$ ricaviamo l'altezza $h = \dfrac{V}{l^2}$.
La superficie totale del parallelepipedo è quindi:

$$S_T = 2A_B + 2p \cdot h = 2l^2 + 4lh = 2l^2 + 4l \cdot \frac{V}{l^2} = 2l^2 + \frac{4V}{l}.$$

Deriviamo la funzione $S_T(l)$ e studiamo il segno della derivata per determinare i punti stazionari.

$$S'_T(l) = 4l - \frac{4V}{l^2}.$$

$$S'_T(l) > 0 \rightarrow 4l - \frac{4V}{l^2} > 0 \rightarrow \frac{l^3 - V}{l^2} > 0 \rightarrow l^3 - V > 0 \rightarrow l > \sqrt[3]{V}.$$



La funzione $S_T(l)$ ha un minimo per $l = \sqrt[3]{V}$.
Calcoliamo ora la diagonale del parallelepipedo considerando il triangolo rettangolo in figura:

$$d(l) = \sqrt{(l\sqrt{2})^2 + h^2} = \sqrt{2l^2 + h^2}$$

Sostituiamo $h = \dfrac{V}{l^2}$:

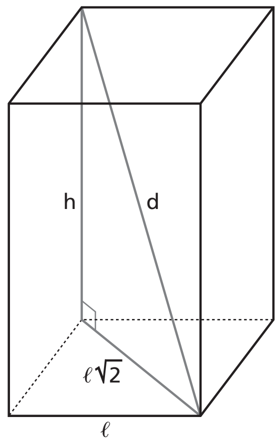
$$d(l) = \sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}.$$

Deriviamo la funzione $d(l)$:

$$d'(l) = \frac{1}{2\sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}} \cdot \left(4l - \frac{4V^2}{l^5}\right).$$

Studiamo il segno della derivata. Il primo fattore è sempre positivo $\forall l > 0$, quindi:

$$d'(l) > 0 \rightarrow 4l - \frac{4V^2}{l^5} > 0 \rightarrow 4l^6 - 4V^2 > 0 \rightarrow l^6 > V^2 \rightarrow l > \sqrt[3]{V}.$$



In $l = \sqrt[3]{V}$ la funzione $d(l)$ ha un punto di minimo, come la funzione $S_T(l)$ già analizzata. Ne concludiamo quindi che il parallelepipedo di area totale minima ha anche la diagonale di lunghezza minima.