SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023

Svolgimento

Quesito 5

Proponiamo tre possibili metodi.

Primo metodo

Considerando il significato geometrico della derivata, possiamo scrivere l'equazione della retta tangente in un punto x_0 come:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Calcoliamo $f(x_0) = f(3) = \sqrt{25-9} = 4$.
Deriviamo la funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

e calcoliamo la derivata per $x_0 = 3$:

$$f'(3) = -\frac{3}{4}.$$

Sostituiamo i valori trovati nell'equazione della retta tangente:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \to y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \to y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Secondo metodo

Il dominio della funzione $y = \sqrt{25-x^2}$ è $-5 \leq x \leq 5$.
Per la condizione di concordanza del segno, dobbiamo avere $y \geq 0$.
In tale ipotesi, possiamo elevare al quadrato l'equazione $y = \sqrt{25-x^2}$, ottenendo

$$y^2 = 25 - x^2 \to x^2 + y^2 = 25.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = 5$.
Poiché $y \geq 0$, il grafico della funzione risulta la semicirconferenza superiore.
Affinché una generica retta r di equazione $y = mx + q$ sia tangente alla semicirconferenza nel punto di ascissa $x = 3$, la retta dovrà passare per il punto $(3; f(3))$ ed essere perpendicolare al raggio che ha un estremo nel punto di tangenza.
L'ordinata del punto di ascissa 3 è $f(3) = \sqrt{25-9} = 4$.
Il coefficiente angolare del raggio che ha per estremi l'origine e il punto $(3; 4)$ vale

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}.$$

La retta tangente dovrà avere un coefficiente angolare antireciproco, ovvero $-\frac{3}{4}$.
Possiamo pertanto scrivere l'equazione della retta utilizzando la forma

$$y - f(x_0) = m(x - x_0) \rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Terzo metodo

Il dominio della funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$ è $-5 \leq x \leq 5$.
Per la condizione di concordanza del segno, dobbiamo avere $y \geq 0$.
In tale ipotesi, possiamo elevare al quadrato l'equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$, ottenendo

$$y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = 5$.
Poiché $y \geq 0$, il grafico della funzione risulta la semicirconferenza superiore.
Affinché una generica retta r di equazione $y = mx + q$ sia tangente alla semicirconferenza nel punto di ascissa $x = 3$, la retta dovrà passare per il punto $(3; f(3))$ e avere distanza dal centro della circonferenza pari al raggio.
L'ordinata del punto di ascissa 3 è $f(3) = \sqrt{25 - 9} = 4$.
Imponiamo quindi il passaggio di r per il punto $(3; 4)$:

$$4 = 3m + q \rightarrow q = 4 - 3m.$$

Sostituiamo nell'equazione della retta r:

$$y = mx + 4 - 3m \rightarrow mx - y + 4 - 3m = 0$$

e imponiamo che la distanza dal centro sia uguale al raggio:

$$d(r; 0) = r \rightarrow \frac{|4 - 3m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \rightarrow |4 - 3m| = 5\sqrt{m^2 + 1}.$$

Eleviamo al quadrato:

$$16 - 24m + 9m^2 = 25(m^2 + 1) \rightarrow 16m^2 + 24m + 9 = 0 \rightarrow (4m + 3)^2 = 0 \rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

L'equazione della retta cercata è quindi:

$$y = -\frac{3}{4}x + 4 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

