SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023

Svolgimento

Quesito 6

Proponiamo due metodi alternativi.

Primo metodo

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - ax^3 - bx}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}.$$

Poiché il limite deve convergere a un numero finito, è necessario che il numeratore tenda a zero, altrimenti il limite divergerebbe a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to0}\left(\cos x - 3ax^2 - b\right) = 0 \to 1 - b = 0 \to b = 1.$$

Il limite diventa quindi:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2}$$

e si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo quindi il teorema di De L'Hospital due volte:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1-6a}{6}.$$

Imponendo che il limite valga 1, otteniamo:

$$\frac{-1-6a}{6} = 1 \to a = -\frac{7}{6}.$$

Quindi $a = -\frac{7}{6} \wedge b = 1$.

Secondo metodo

Il limite può essere scritto nella forma:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - ax^3 - bx}{x^3} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3} - a - \frac{b}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left[-a + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right)\right].$$

Per il primo limite notevole, è noto che

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Se fosse quindi $b \neq 1$, ne deriverebbe che

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right) \neq 0$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-b\right)\right]$$

divergerebbe a $\pm\infty$.

Poiché serve che $\lim_{x\to 0}\left[-a+\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-b\right)\right]$ converga a un numero finito, occorre quindi $b=1$.

A questo punto, valutiamo

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]$$

Il limite equivale a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che può essere risolta applicando tre volte il teorema di De L'Hospital.

Si ha dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Tornando all'uguaglianza iniziale, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=1\to\lim_{x\to 0}\left[-a+\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=1\to$$

$$\to -a-\frac{1}{6}=1\to a=-\frac{7}{6}.$$

Quindi $a=-\frac{7}{6}\wedge b=1$.

