SECONDA PROVA DI MATEMATICA
22 giugno 2023

Svolgimento

Quesito 7

La funzione $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$. L'espressione analitica di ciascun tratto corrisponde a una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, e, in particolare, $f(x)$ è continua e derivabile negli intervalli $]-\infty; 0[$ e $]0; +\infty[$. Dobbiamo quindi determinare per quali valori dei parametri a e b la funzione risulta derivabile anche in $x = 0$. Per farlo possiamo utilizzare il criterio di derivabilità, che necessita però della continuità in $x = 0$. Tale condizione è comunque necessaria, poiché la derivabilità in un punto implica la continuità nello stesso. Affinché $f(x)$ sia continua in $x = 0$ deve valere:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \to \lim_{x\to 0^-} (-1 + \arctan x) = a \cdot 0 + b \to -1 + \arctan 0 = b \to b = -1.$$

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamo:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x^2} = 1; \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} a = a, a \in \mathbb{R}.$$

Possiamo applicare il criterio di derivabilità.
Affinché la funzione sia derivabile in $x = 0$ deve valere

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0^+} a \to 1 = a \to a = 1.$$

Sostituiamo i valori dei parametri che abbiamo determinato e troviamo l'espressione analitica della funzione $f(x)$ e della sua derivata $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è sempre crescente.
Ricordiamo quali sono le ipotesi che una funzione $g(x)$ deve soddisfare per il teorema di Rolle in un intervallo $[a; b]$ di $\mathbb{R}$. Deve valere che:

- $g(x)$ è continua in $[a; b]$;
- $g(x)$ è derivabile in $]a; b[$;
- $g(a) = g(b)$.

La funzione $f(x)$ soddisfa le prime due ipotesi, ma poiché la funzione è sempre crescente la terza ipotesi non può essere soddisfatta in nessun intervallo $[a; b]$, poiché varrà sempre $f(b) > f(a)$. Quindi non esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle.