Questito 8

La funzione $f_a(x)$ è polinomiale, quindi ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ per qualunque $a > 0$.
Deriviamo la funzione e studiamo il segno della derivata:

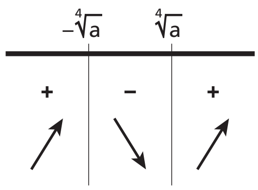
$$f_a'(x) = 5x^4 - 5a > 0 \rightarrow x^4 - a > 0$$

Poiché $a > 0$, possiamo scomporre:

$$(x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a}) > 0.$$

Il fattore $(x^2 + \sqrt{a})$ è sempre positivo $\forall x \in \mathbb{R}$. Poniamo qundi:

$$x^2 - \sqrt{a} \geq 0 \rightarrow x < -\sqrt[4]{a} \vee x > \sqrt[4]{a}.$$



Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$$

Dalle caratteristiche di monotonia della funzione e dai limiti negli estremi del dominio deduciamo che la funzione può avere al massimo uno zero nell'intervallo $]-\infty; -\sqrt[4]{a}[$, al massimo uno zero nell'intervallo $]-\sqrt[4]{a}; \sqrt[4]{a}[$ e al massimo uno zero nell'intervallo $]\sqrt[4]{a}; +\infty[$.
Affinché esista uno zero nell'intervallo $]-\infty; \sqrt[4]{a}[$, per il teorema di esistenza degli zeri è necessario (e sufficiente) che sia $f(-\sqrt[4]{a}) > 0$. Analogamente, affinché esista uno zero nell'intervallo $]\sqrt[4]{a}; +\infty; [$, per il teorema di esistenza degli zeri è necessario (e sufficiente) che sia $f(\sqrt[4]{a}) < 0$. Queste condizioni assicurano, sempre per il teorema di esistenza degli zeri, che esista uno zero nell'intervallo $]-\sqrt[4]{a}; \sqrt[4]{a}[$.
Quindi la funzione ha tre zeri distinti se e solo se $f(-\sqrt[4]{a}) > 0$ e $f(\sqrt[4]{a}) < 0$.
Il sistema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} f(-\sqrt[4]{a}) > 0 \\ f(\sqrt[4]{a}) < 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} a(-\sqrt[4]{a}) + 5a\sqrt[4]{a} + a > 0 \\ a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a < 0 \end{cases},$$

Risolviamo il sistema dividendo per $a > 0$ entrambe le disequazioni:

$$\begin{cases} 4\sqrt[4]{a} + 1 > 0 \\ -4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt[4]{a} > -\frac{1}{4} \\ \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \end{cases} \to \begin{cases} \forall a > 0 \\ a > \frac{1}{256} \end{cases}$$

La funzione ha tre zeri reali distinti se $a > \frac{1}{256}$.

