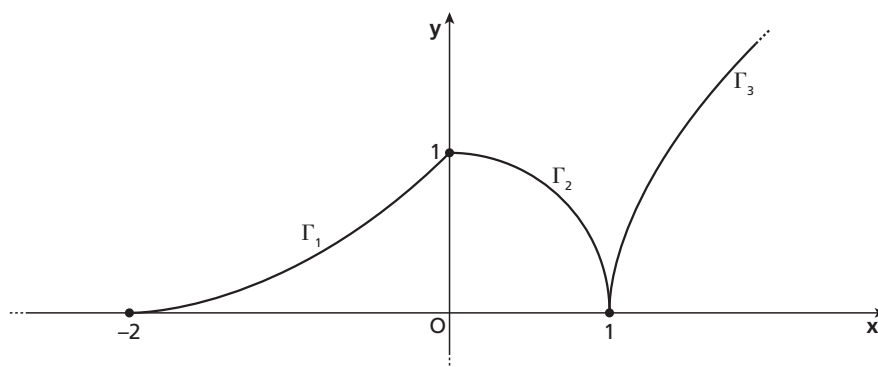

SECONDA PROVA DI MATEMATICA 2023

Testo

Il candidato o la candidata risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMI

- 1** Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1 , dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3 .



- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x + 2)^2, \quad x^2 + y^2 + b = 0, \quad x^2 - y^2 + c = 0,$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c .

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

- b) A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.
- c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.
- d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

- 2** Fissato un parametro reale a , con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a .

- a) Al variare del parametro a , determinare il dominio di f_a , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a . Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1} .
- d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1} , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

QUESITI

- 1** Sia ABC un triangolo rettangolo in A . Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A .
Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC .
- 2** Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
- un numero primo;
 - un numero almeno pari a 3;
 - un numero al più pari a 3.

- 3** Considerata la retta r passante per i due punti $A(1; -2; 0)$ e $B(2; 3; -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1; -6; 7)$ e tangente a r .
- 4** Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.
- 5** Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.
- 6** Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

- 7** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di \mathbb{R} in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

- 8** Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.