ESAME DI STATO 2024 ◇ PROVA DI MATEMATICA

Svolgimento del problema 1

1 **Parte a**

Per determinare il valore dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ imponiamo che la retta $t : 7x + y - 12 = 0$ sia tangente al grafico nel suo punto P di ascissa $x = 1$. Esprimiamo l'espressione di t in forma esplicita:

$$7x + y - 12 = 0 \rightarrow y = -7x + 12.$$

Determiniamo l'ordinata del punto P:

$$y_P = -7x_P + 12 \rightarrow y_P = -7 \cdot 1 + 12 \rightarrow y_P = 5.$$

Quindi, il punto P ha coordinate $P(1; 5)$.

Possiamo quindi imporre che la retta t sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ richiedendo che siano soddisfatte le seguenti condizioni.

$$\begin{cases} f'_{a,b}(1) = -7 \\ f_{a,b}(1) = 5 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata prima di $f_{a,b}(x)$:

$$f'_{a,b}(x) = \frac{3ax^2 \cdot x^2 - 2x(ax^3 + b)}{x^4} \rightarrow f'_{a,b}(x) = \frac{3ax^4 - 2ax^4 - 2bx}{x^4} \rightarrow f'_{a,b}(x) = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4}.$$

Poiché siamo interessati al valore della derivata nel punto $P(1; 5)$ possiamo supporre $x \neq 0$, quindi:

$$f'_{a,b}(x) = \frac{ax^3 - 2b}{x^3}.$$

Possiamo quindi ricavare i valori dei parametri a e b.

$$\begin{cases} f'_{a,b}(1) = -7 \\ f_{a,b}(1) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 2b = -7 \\ a + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 2b = -7 \\ a + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Quindi, $a = 1$ e $b = 4$.

Parte b

Il dominio naturale della funzione $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ è $D = \mathbb{R} - \{0\}$: infatti, l'unico valore per cui $f(x)$ non ha significato è $x = 0$, che annulla il denominatore.

Poiché $f(-x) = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$, segue che $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$: pertanto, la funzione non è né pari né dispari, e quindi il suo grafico non è simmetrico né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine.

Non ci sono punti di intersezione con l'asse y, poiché $x \neq 0$ per le condizioni del dominio.

Per determinare i punti di intersezione con l'asse x, risolviamo l'equazione

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 + 4 = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{4}.$$

Quindi il grafico interseca l'asse x solo nel punto $\left(-\sqrt[3]{4}; 0\right)$.

Per studiare il segno poniamo $f(x) > 0$, ovvero $\frac{x^3+4}{x^2} > 0$. Il denominatore è sempre positivo nel dominio, pertanto il segno della funzione è concorde con quello del numeratore: la funzione è quindi positiva per $x > -\sqrt[3]{4}$ (con $x \neq 0$) e negativa per $x < -\sqrt[3]{4}$.

Poiché f è continua in ogni intervallo del suo dominio, cerchiamo eventuali asintoti verticali calcolando il limite in $x = 0$, che è l'unico punto di accumulazione di D non appartenente al dominio:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$$

Osserviamo che il limite destro e il limite sinistro coincidono, perché il denominatore è positivo sia per $x \rightarrow 0^-$, sia per $x \rightarrow 0^+$.

La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$.

La funzione non ammette invece asintoti orizzontali, in quanto

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty.$$

Determiniamo se esistono asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - 1 \cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4}{x^2}\right] = 0.$$

La funzione ammette quindi asintoto obliquo destro e sinistro di equazione $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante).

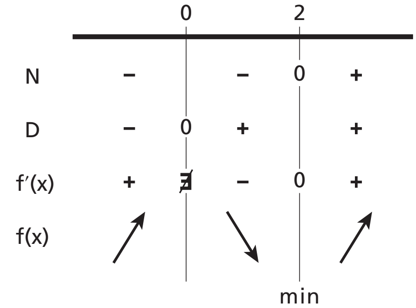
Consideriamo ora la derivata di $f(x)$, ottenuta sostituendo $a = 1$ e $b = 4$ nell'espressione di $f'_{a,b}(x)$ già calcolata:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

Osserviamo che il dominio di $f'(x)$ coincide con il dominio di $f(x)$, e quindi non ci sono punti in cui $f(x)$ non è derivabile: di conseguenza, non esistono punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale.

Per determinare gli intervalli di monotonia e i punti di estremo, studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 2;$$
$$f'(x) < 0 \rightarrow 0 < x < 2;$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2.$$



La funzione è crescente in $]-\infty; 0[$ e in $]2; +\infty[$, decrescente in $]0; 2[$. Ricordando che $x = 0$ non appartiene al dominio, l'unico punto di estremo relativo per $f(x)$ è quindi $x = 2$, che è un punto di minimo relativo. Poiché $f(2) = \dfrac{2^3 + 4}{2^2} = 3$, le sue coordinate sono $(2; 3)$.

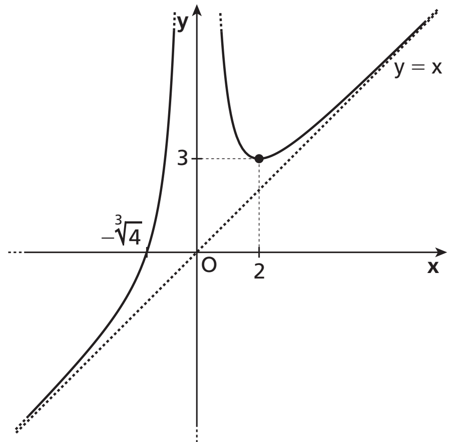
La funzione non ha punti di estremo assoluto, perché è illimitata sia inferiormente, sia superiormente.

Per studiare la concavità e determinare gli eventuali punti di flesso, studiamo il segno di $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}.$$

La derivata seconda è positiva in tutto il dominio, pertanto la funzione rivolge la concavità verso l'alto in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$. Non ci sono punti di flesso.

Il grafico γ è pertanto il seguente:



Per determinare l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P, che chiameremo s, consideriamo il fascio di rette per P:

$$F_p : y - 5 = m(x - 1).$$

Chiamiamo $Q(x_0; y_0)$ il punto di tangenza.

Impostiamo il sistema formato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} y_0 - 5 = m(x_0 - 1), \text{ per l'appartenenza di } Q \text{ alla retta del fascio} \\ y_0 = \dfrac{{x_0}^3 + 4}{{x_0}^2}, \text{ per l'appartenenza di } Q \text{ a } \gamma \\ m = \dfrac{{x_0}^3 - 8}{{x_0}^3}, \text{ perché il coefficiente angolare è la derivata di } f(x) \text{ nell'ascissa del punto di tangenza.} \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli, nominando le due variabili, per semplicità di notazione, x e y:

$$\begin{cases} y = m(x - 1) + 5 \\ y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} \\ m = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni di y e m nella prima equazione, si ottiene:

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} = \frac{x^3 - 8}{x^3} \cdot (x - 1) + 5 \rightarrow x^4 + 4x = x^4 - x^3 - 8x + 8 + 5x^3 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0,$$

con $x \neq 0$.

Poiché una delle soluzioni è $x = 1$, scomponiamo il polinomio con il metodo di Ruffini.

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0

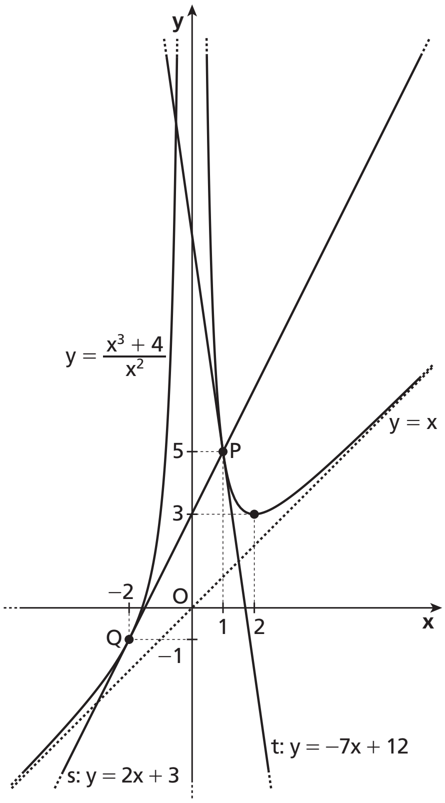
Otteniamo

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = -2$ e $x = 1$.

Osserviamo che la soluzione $x = 1$ corrisponde all'ascissa del punto P per cui si ottiene la retta tangente t già nota.

Per $x = -2$, invece, si ottengono il punto di tangenza $Q(-2; -1)$ e la relativa retta s di equazione $y = 2x + 3$, tangente a γ in Q.



Parte c

Osserviamo che l'equazione $y - 5 = m(x - 1)$ rappresenta il fascio di rette passanti per il punto P a meno della retta $x = 1$, parallela all'asse y.

Per risolvere il problema posto, consideriamo il sistema formato dall'equazione del fascio di rette e dall'espressione analitica della funzione $f(x)$:

$$\begin{cases} y - 5 = m(x - 1) \\ y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} \end{cases}.$$

Otteniamo l'equazione risolvente:

$$m(x - 1) + 5 = \frac{x^3 + 4}{x^2} \to mx^3 - mx^2 + 5x^2 = x^3 + 4 \to (m - 1)x^3 + (5 - m)x^2 - 4 = 0,$$

con $x \neq 0$.

Sappiamo che $x = 1$ è una soluzione, poiché il punto P appartiene al grafico di $f(x)$. Possiamo dunque fattorizzare come segue, usando il metodo di Ruffini:

	m − 1	5 − m	0	−4
1		m − 1	4	4
	m − 1	4	4	0

L'equazione risolvente equivale a a:

$$(x-1)[(m-1)x^2+4x+4]=0.$$

Se $m=1$, l'equazione diventa $(x-1)(4x+4)=0$, che ammette due soluzioni distinte: $x=-1$ e $x=1$. Osserviamo che la retta del fascio con coefficiente angolare $m=1$ è parallela all'asintoto obliquo.

Se invece $m \neq 1$, dobbiamo analizzare il segno del discriminante dell'equazione di secondo grado $(m-1)x^2+4x+4=0$:

$$\frac{\Delta}{4}=4-4(m-1)=8-4m.$$

- Per $8-4m<0$, ovvero per $m>2$, l'equazione non ha soluzioni reali. In questo caso, l'unica intersezione della retta del fascio con γ è il punto P.
- Per $8-4m=0$, ovvero $m=2$, l'equazione ha una soluzione reale doppia: $x=-2$. Notiamo che questa soluzione corrisponde alla retta tangente in Q determinata in precedenza. Tale retta tangente poteva quindi essere determinata anche seguendo il procedimento appena descritto in questa parte c.
- Per $8-4m>0$, ovvero per $m<2$, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Verifichiamo che una delle due soluzioni è $x=1$ se e solo se $m=-7$, sostituendo 1 nell'equazione di secondo grado:

  $$m-1+4+4=0 \rightarrow m=-7.$$

  Segue che, per $m=-7$, la soluzione $x=1$ è una soluzione doppia dell'equazione risolvente.

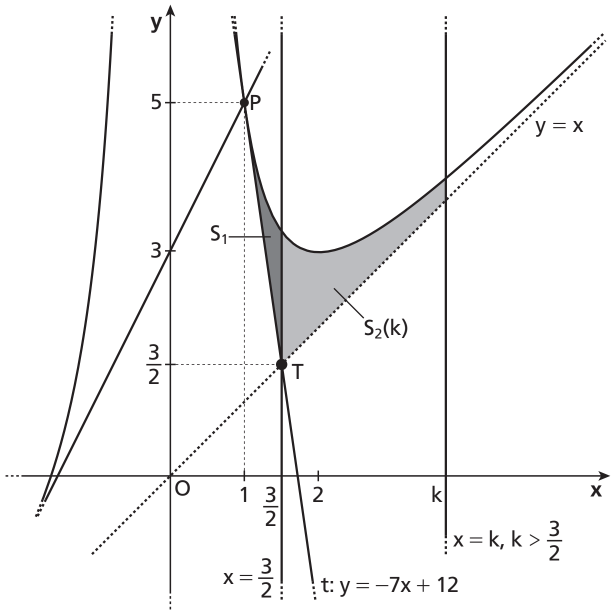
In sintesi, le intersezioni tra la retta $y-5=m(x-1)$ e γ sono:

- per $m<-7$, tre distinte;
- per $m=-7$, tre, di cui due coincidenti in $P(1;5)$;
- per $-7<m<1$, tre distinte;
- per $m=1$, due distinte;
- per $1<m<2$, tre distinte;
- per $m=2$, tre, di cui due coincidenti in $Q(-2;-1)$;
- per $m>2$, un'intersezione costituita dal punto $P(1;5)$.

Parte d

Osserviamo che il punto di intersezione T tra la retta t e l'asintoto obliquo ha coordinate $T\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Possiamo dunque suddividere la regione in due zone, separate dalla retta di equazione $x=\frac{3}{2}$, di area rispettivamente S_1 ed $S_2(k)$, tali che $S(k)=S_1+S_2(k)$.



Dunque

$$S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[f(x) - (-7x + 12) \right] \, dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} + 7x - 12 \right) \, dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{4}{x^2} + 7x - 12 \right) \, dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x + \frac{4}{x^2} - 12 \right) \, dx = \left[4x^2 - \frac{4}{x} - 12x \right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$S_2(k) = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left[f(x) - x \right] \, dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) \, dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \frac{4}{x^2} \, dx = \left[-\frac{4}{x} \right]_{\frac{3}{2}}^{k} = -\frac{4}{k} + \frac{8}{3}.$$

Quindi $S(k) = S_1 + S_2(k) = \frac{1}{3} - \frac{4}{k} + \frac{8}{3} = 3 - \frac{4}{k}$.

Il limite $\lim_{k \to +\infty} S(k) = \lim_{k \to +\infty} \left(3 - \frac{4}{k} \right) = 3$ rappresenta l'area della regione illimitata di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo e la retta t.

