Svolgimento del problema 2

1 **Parte a**

Studiamo la derivabilità della funzione in $x = 0$. Distinguiamo tre casi:

1) n dispari;
2) n pari, $n > 2$;
3) n=2.

1) Se n è dispari possiamo scrivere $\sqrt[n]{x^2} = x^{\frac{2}{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}.$$

Calcoliamo ora la derivata per $x \neq 0$:

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2}{n}-1} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} \to f_n'(x) = \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} \to$$
$$f_n'(x) = \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$ (tenendo conto che $n \geq 3$, quindi $n - 2 > 0$):

$$f_{n^-}'(0) = \lim_{x\to 0^-}\Bigg(\underbrace{\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}}_{\downarrow\ -\infty} - \underbrace{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}_{\downarrow\ b/2}\Bigg) = -\infty$$

$$f_{n^+}'(0) = \lim_{x\to 0^+}\Bigg(\underbrace{\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}}_{\downarrow\ +\infty} - \underbrace{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}_{\downarrow\ b/2}\Bigg) = +\infty$$

Deduciamo che con n dispari la funzione non è derivabile e presenta una cuspide in $x = 0$.

2) Se n è pari e $n > 2$ la funzione $\sqrt[n]{x^2}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, è pari e si può scrivere nella forma $|x|^{\frac{2}{n}}$, cioè:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata per $x \neq 0$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \\ -\frac{2}{n} \cdot (-x)^{\frac{2-n}{n}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0. \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \\ -\frac{2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$ (anche in questo caso, $n > 3$, quindi $n - 2 > 0$):

$$f_{n^-}'(0) = \lim_{x \to 0^-} \left(\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{\frac{-2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}}} - \underset{\underset{b/2}{\downarrow}}{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}} \right) = -\infty$$

$$f_{n^+}'(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}} - \underset{\underset{b/2}{\downarrow}}{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}} \right) = +\infty$$

Deduciamo che con n pari, $n > 2$, la funzione non è derivabile e presenta una cuspide in $x = 0$.

3) Se $n = 2$ la funzione diventa:

$$f_2(x) = \sqrt{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1} \rightarrow f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+bx+1} \rightarrow$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x \geq 0 \\ -x - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x < 0 \end{cases} .$$

Calcoliamo la derivata per $x \neq 0$:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \\ -1 - \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0 \end{cases} .$$

Calcoliamo la derivata sinistra e quella destra in $x = 0$:

$$f_{2^-}'(0) = \lim_{x \to 0^-} \left(-1 - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} \right) = -1 - \frac{b}{2}$$

$$f_{2^+}'(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} \right) = 1 - \frac{b}{2}.$$

Notiamo che, essendo $-1 - \frac{b}{2} \neq 1 - \frac{b}{2}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, con $n = 2$ la funzione non è derivabile e presenta un punto angoloso in $x = 0$.

Consideriamo
$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}.$$
Il grafico deve essere simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, quindi $f_2(x)$ deve essere pari. Imponiamo la condizione di parità:
$$f_2(-x) = f_2(x),\ \forall x \in [-1;1] \rightarrow$$
$$|x| - \sqrt{ax^2 - bx + 1} = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1} \rightarrow ax^2 - bx + 1 = ax^2 + bx + 1 \rightarrow 2bx = 0 \rightarrow b = 0.$$
Quindi:
$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + 1}.$$
Consideriamo il dominio della funzione $f_2(x)$:
$$ax^2 + 1 \geq 0 \rightarrow -\sqrt{-\frac{1}{a}} \leq x \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}.$$
Poiché il dominio deve essere $[-1;1]$ dobbiamo imporre che $\sqrt{-\frac{1}{a}} = 1$, quindi $-\frac{1}{a} = 1 \rightarrow a = -1$. Affinché il grafico di $f_2(x)$ sia α deve valere $b = 0$, $a = 1$. D'ora in avanti $f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$.

Parte b

Consideriamo ora la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$ e studiamone le caratteristiche.

- Dominio della funzione $g(x)$: $1 - x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Quindi, $D = [-1;1]$.
- Parità della funzione: $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in D$. Quindi, la funzione $g(x)$ è pari.
- Segno della funzione: $|x| + \sqrt{1 - x^2} > 0$, $\forall x \in D$.

Poiché il dominio è limitato, non sono presenti asintoti orizzontali od obliqui. Inoltre, la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1;1]$; quindi per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo assoluti, perciò non sono presenti asintoti verticali.

Verifichiamo che la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x = 0$ e in $x = \pm 1$. Esprimiamo la funzione per casi e calcoliamone la derivata:
$$g(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{1 - x^2}, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ x + \sqrt{1 - x^2}, \text{ se } 0 < x \leq 1 \end{cases};$$
$$g'(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } -1 < x < 0 \\ 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } 0 < x < 1 \end{cases}.$$
Calcoliamo le derivate destra e sinistra di $g(x)$ per x che tende a 0:
$$\lim_{x \to 0^-} g'(x) = -1; \qquad \lim_{x \to 0^+} g'(x) = 1.$$
Le derivate destra e sinistra non coincidono, quindi la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

Calcoliamo la derivata destra di $g(x)$ per x che tende a -1:

$$\lim_{x\to -1^+} g'(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata sinistra di $g(x)$ per x che tende a 1:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = -\infty.$$

Quindi, la funzione non è derivabile nei due estremi del dominio $x = \pm 1$.

Pertanto, la derivata $g'(x)$ è definita in $D' = D - \{\pm 1, 0\}$. Per la parità di $g(x)$, possiamo limitarci a studiare il segno di $g'(x)$ nell'intervallo $]0;1[$:

$$1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \to \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

Nell'intervallo $]0;1[$ il denominatore è sempre positivo, quindi studiare il segno di $g'(x)$ si riduce a risolvere la disequazione irrazionale:

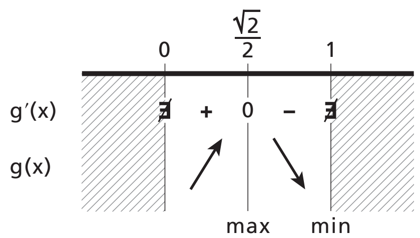
$$\sqrt{1-x^2} > x, \text{ con } x > 0.$$

Quindi

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} > x \\ x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 - x^2 > x^2 \\ x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x > 0 \end{cases}.$$

Quindi, $g'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Perciò, la funzione $g(x)$ è monotona crescente nell'intervallo $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, mentre è monotona decrescente nell'intervallo $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$.

Disegniamo il quadro dei segni per la derivata $g'(x)$ nell'intervallo $]0;1[$.



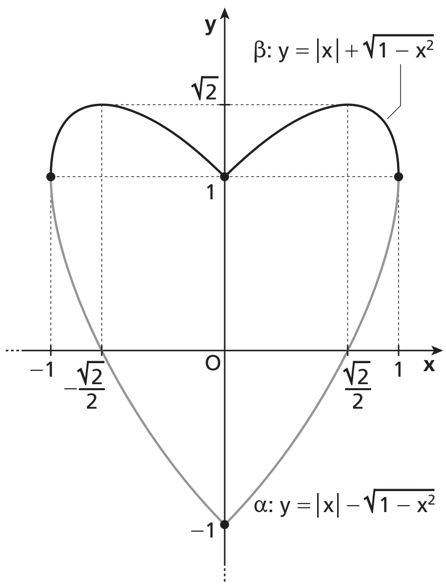
Osserviamo che poiché $g(x)$ è continua in $x = 1$, questo è un punto di minimo. Data la parità della funzione anche $x = -1$ è punto di minimo. La funzione vale $g(1) = g(-1) = 1$. Inoltre, calcoliamo il valore del massimo corrispondente al punto di massimo $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Studiamo ora la concavità della funzione $g(x)$. In $D' = D - \{\pm 1, 0\}$ possiamo calcolare la derivata seconda che vale:

$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Osserviamo che $g''(x) < 0 \ \forall x \in D'$, quindi la funzione è concava.

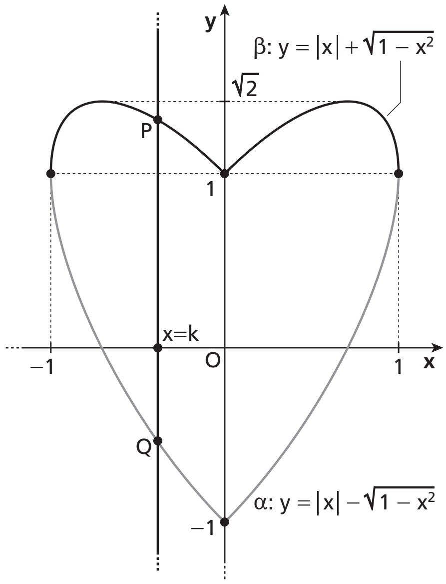
Indichiamo con β il grafico di $g(x)$ e tracciamo la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$, ricordando che $g(x)$ è pari.



Parte c

Supponiamo che il punto P appartenga a β e il punto Q appartenga ad α, quindi $y_P > y_Q$. Possiamo quindi scrivere le coordinate dei due punti come segue:

$$P(k; |k| + \sqrt{1-k^2}), \qquad Q(k; |k| + \sqrt{1-k^2}), \quad \text{con } -1 < k < 1.$$

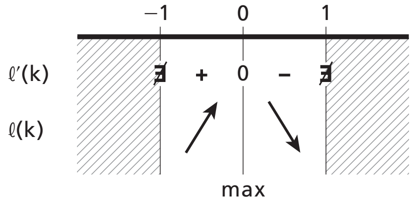


Calcoliamo la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ che dipende da k, con $-1 < k < 1$:

$$l(k) = \overline{PQ} = |y_P - y_Q| = g(k) - f_2(k) = |k| + \sqrt{1-k^2} - |k| + \sqrt{-k^2+1} = 2\sqrt{1-k^2}.$$

La funzione $l(k)$ ha un punto di massimo in $k = 0$, infatti $l'(k) = -\frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}$ che si annulla in $k = 0$. Disegniamo il quadro dei segni.

Questo vuol dire che $\overline{PQ}$ è massimo se r è $x = 0$, cioè è l'asse y che è l'asse di simmetria di γ in quanto $g(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni pari.



Parte d

Per verificare che $H(x)$ è una primitiva di $h(x)$ basta dimostrare che $H'(x) = h(x)$. Calcoliamo $H'(x)$:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right) \rightarrow$$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\frac{1+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow H'(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow H'(x) = \sqrt{1-x^2} = h(x).$$

Per calcolare l'area A_γ usiamo il calcolo integrale:

$$A_\gamma = \int_{-1}^{1} |g(x) - f_2(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Poiché la funzione integranda è pari, possiamo riscrivere l'integrale come:

$$A_\gamma = 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_{0}^{1} h(x)\,dx = 4[H(x)]_0^1 = 4[H(1) - H(0)] =$$

$$4\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin 1 + 0\right) - 0\right] = 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

