SECONDA PROVA DI MATEMATICA

20 giugno 2024

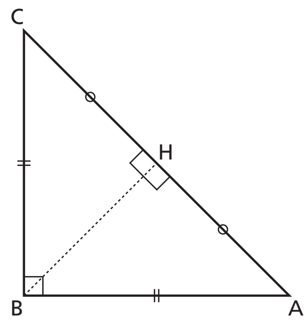
Svolgimento

Quesito 1

Consideriamo un triangolo ABC, rettangolo in B.
Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione, quindi consideriamo due casi.

1. Dimostriamo che, se ABC è isoscele, allora BH è congruente a metà dell'ipotenusa.

   Se ABC è isoscele, allora i cateti BC e BA sono congruenti; in questo caso, l'altezza BH relativa all'ipotenusa risulta anche mediana relativa all'ipotenusa.

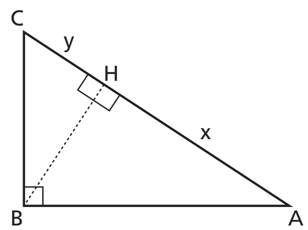
   

   Sappiamo inoltre che, in un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa, quindi $BH \cong \frac{1}{2}AC$.

2. Viceversa, supponiamo che nel triangolo ABC, rettangolo in B, l'altezza BH relativa all'ipotenusa sia congruente a metà ipotenusa: $BH \cong \frac{1}{2}AC$. Vogliamo dimostrare che tale triangolo è isoscele. Proponiamo due metodi alternativi, entrambi validi.

   Alternativa 1.

   Poniamo $\overline{AH} = x$ e $\overline{HC} = y$, con $x, y > 0$.

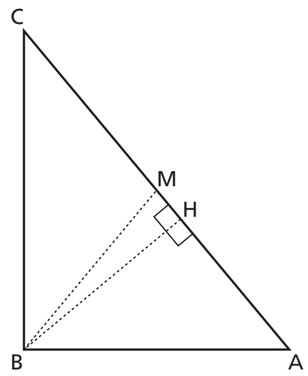
   Allora, poiché $\overline{BH} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AH} + \overline{HC}}{2} = \frac{x+y}{2}$ per l'ipotesi fatta e $\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HC} = x \cdot y$ per il secondo teorema di Euclide, si ha:

$$\frac{(x+y)^2}{4} = x \cdot y \to x^2 + y^2 + 2xy = 4xy \to (x-y)^2 = 0 \to x = y \to \overline{AH} = \overline{HC} = \overline{BH}.$$

Segue che i triangoli ABH e CBH sono triangoli rettangoli iscosceli. In particolare, $B\hat{C}A \cong C\hat{A}B \cong \frac{\pi}{4}$ e il triangolo ABC è dunque isoscele su base AC.

Alternativa 2.

Supponiamo per assurdo che ABC non sia isoscele. Allora l'altezza BH non coincide con la mediana BM relativa all'ipotenusa.



Come già ricordato, in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa, quindi vale anche $BM \cong \frac{1}{2}AC$.

Nel triangolo BHM, non degenere poiché M e H sono punti distinti, i lati BH e BM sono congruenti perché entrambi congruenti a metà ipotenusa.

Questo però è assurdo, perché il triangolo rettangolo BHM ha un cateto e l'ipotenusa tra loro congruenti: questo contraddice il teorema di Pitagora, in quanto si avrebbe $\overline{BM}^2 = \overline{BH}^2$ (e non $\overline{BM}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{MH}^2$).

Quindi, il triangolo ABC è isoscele.

Abbiamo dunque dimostrato che un triangolo rettangolo è isoscele se e solo se l'altezza relativa all'ipotenusa è congruente a metà dell'ipotenusa.

