SECONDA PROVA DI MATEMATICA
20 giugno 2024

Svolgimento

Quesito 2

– È noto dal *problema delle prove ripetute* che, dato un evento aleatorio con probabilità p di verificarsi, la probabilità che esso si verifichi esattamente k volte su n tentativi è data da:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dunque, la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte su 5 lanci vale:

$$p_2 = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3.$$

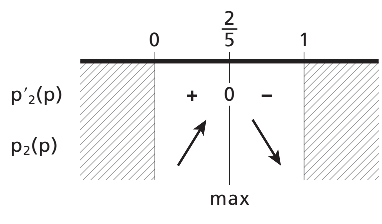
– Vogliamo determinare p affinché la funzione $p_2(p) = 10p^2(1-p)^3$ sia massima. Per fare questo, deriviamo rispetto a p e otteniamo:

$$\begin{aligned} p_2'(p) = & 10\left[2p(1-p)^3 + p^2 \cdot 3 \cdot (1-p)^2 \cdot (-1)\right] = \\ & 10\left[2p(1-p)^3 - 3p^2(1-p)^2\right] = \\ & 10p(1-p)^2\left[2(1-p) - 3p\right] = \\ & 10p(1-p)^2(2-5p). \end{aligned}$$

Studiamo il segno di questa derivata, considerando che, essendo p una probabilità, si avrà $0 \le p \le 1$. Otteniamo:

- $10 \ge 0 \, \forall p \in [0;1]$
- $p \ge 0 \, \forall p \in [0;1]$
- $(1-p)^2 \ge 0 \, \forall p \in [0;1]$
- $2 - 5p \ge 0 \leftrightarrow p \le \frac{2}{5}.$

Dunque, si ottiene il seguente quadro dei segni.



Pertanto, $p_2(p)$ è massima se $p = \frac{2}{5}$.