SECONDA PROVA DI MATEMATICA
20 giugno 2024

Svolgimento

Quesito 4

Proponiamo due possibili metodi.

Metodo analitico

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + x - \cos x$, che ha dominio $\mathbb{R}$. La derivata è

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x.$$

Poiché $-1 \le \sin x \le 1$, abbiamo che

$$3x^2 \le f'(x) \le 3x^2 + 2,$$

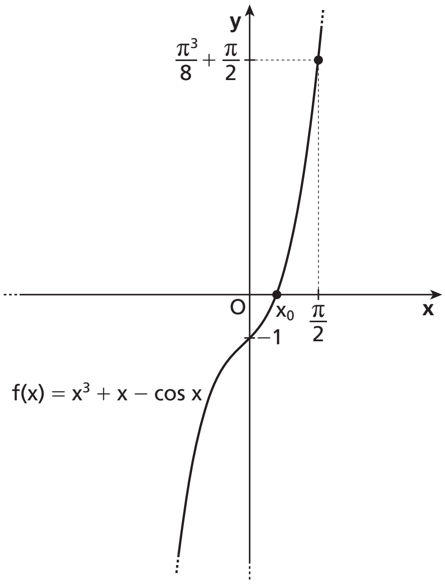
quindi la derivata è sempre positiva, tranne eventualmente in $x = 0$. Tuttavia, in $x = 0$ otteniamo

$$f'(0) = 1 > 0,$$

quindi $f'(x) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$, cioè la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in tutto il suo dominio. Inoltre:

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{e} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2} > 0,$$

quindi, per il teorema degli zeri e per il fatto che la funzione $f(x)$ è crescente, esiste un unico zero $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ della funzione $f(x)$. Ciò significa che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ha una sola soluzione, e questa è positiva.



Metodo grafico

Scriviamo l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ nella forma $x^3 + x = \cos x$ e cerchiamo le sue soluzioni con il metodo grafico.
Consideriamo le funzioni $f(x) = x^3 + x$ e $g(x) = \cos x$, entrambe continue e derivabili in $\mathbb{R}$.
Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ g(x) = \cos x. \end{cases}$$

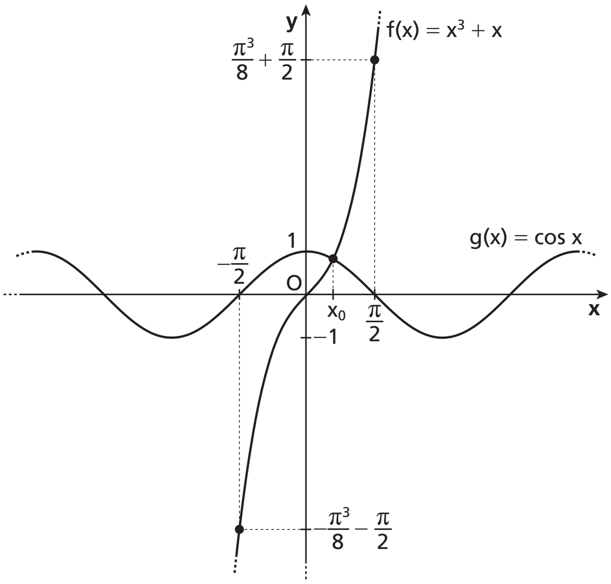
Calcoliamo $f'(x) = 3x^2 + 1$ e notiamo che $f'(x) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
Osserviamo inoltre che la funzione $g(x)$ ha immagine $[-1; 1]$.
Consideriamo innanzitutto il caso $x \leq 0$. Poiché $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi}{2} < -1$ e $f(0) = 0$, possiamo concludere che:

- per $x \in \left]-\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) < -1 < g(x)$;
- per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $f(x) \leq 0 < g(x)$.

Dunque, per $x \leq 0$ non ci sono intersezioni tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, quindi l'equazione non ha soluzioni.
Consideriamo ora il caso $x > 0$. Poiché $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2} > 1$, abbiamo che:

- per $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ è crescente e varia tra 0 e $\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$, mentre $g(x)$ è decrescente e varia tra 1 e 0; esiste quindi un unico numero reale $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tale che $f(x) = g(x)$, cioè x_0 è soluzione dell'equazione;
- per $x \in \left]\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$, $f(x) > 1 > g(x)$, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Concludiamo quindi che l'equazione ha un'unica soluzione x_0 e che tale soluzione è positiva, in quanto compresa nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.


y
$\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi}{2}$
$f(x) = x^3 + x$
1
$-\frac{\pi}{2}$
O
$g(x) = \cos x$
x_0
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$-\frac{\pi^3}{8}-\frac{\pi}{2}$