SECONDA PROVA DI MATEMATICA
20 giugno 2024
Svolgimento

Quesito 5

Poiché $p(x)$ è un polinomio di quarto grado, la legge della funzione è

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k,$$

dove a, b, c, d e k sono opportune costanti reali da determinare.
Analizziamo le tre condizioni fornite dal testo.

1. Il grafico della funzione è tangente all'asse x nell'origine. Questo significa che:
   - il grafico passa per l'origine, ovvero $p(0) = 0$;
   - il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nell'origine, $p'(0)$, deve coincidere con la pendenza dell'asse x, che è 0: quindi $p'(0) = 0$.
2. Il grafico della funzione passa per il punto $(1; 0)$, quindi $p(1) = 0$.
3. Il grafico della funzione ha un punto stazionario in $(2; -2)$, quindi:
   - il grafico passa per $(2; -2)$, ovvero $p(2) = -2$;
   - per definizione di punto stazionario, la derivata di $p(x)$ in $x = 2$ è nulla, ovvero $p'(2) = 0$.

Mettiamo a sistema le cinque relazioni che abbiamo trovato:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = -2 \\ p'(2) = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo le cinque condizioni nelle espressioni $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ e $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, si ottiene:

$$\begin{cases} a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + k = 0 \\ 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + k = 0 \\ a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + k = -2 \\ 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} k = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d + k = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + k = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} k = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases}.$$

Per risolvere il sistema costituito dalle ultime tre equazioni si può ricavare c in funzione di a e b nella terza equazione, e sostituirla nelle ultime due:

$$\begin{cases} c = -a - b \\ 16a + 8b + 4(-a - b) = -2 \\ 32a + 12b + 4(-a - b) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ 6a + 2b = -1 \\ 7a + 2b = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla terza si ottiene $a = 1$, che permette di determinare anche i valori di b e c:

$$\begin{cases} c = -a - b \\ a = 1 \\ 7a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \frac{5}{2} \\ a = 1 \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

I coefficienti cercati sono quindi:

$$a = 1, \quad b = -\frac{7}{2}, \quad c = \frac{5}{2}, \quad d = 0, \quad k = 0.$$

La funzione richiesta è pertanto

$$y = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2.$$