SECONDA PROVA DI MATEMATICA
20 giugno 2024

Svolgimento

Quesito 6

Determiniamo l'espressione analitica di $F(x)$, considerando l'integrale indefinito associato $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt$.
Poiché $\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$, l'integrale si presenta nella forma $-\int \cos\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\, dt$, con $g(t) = \frac{1}{t}$.
Dunque:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt = \int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + c.$$

Pertanto:

$$F(x) = \left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right).$$

La condizione $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ si traduce nell'equazione:

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2},$$

da cui, poiché $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$\sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}.$$

Si tratta di un'equazione goniometrica elementare nell'incognita a. Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{1}{a} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \to \\
&\frac{1}{a} = \frac{\pi + 12k\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{1}{a} = \frac{5\pi + 12k\pi}{6} \to \\
&a = \frac{6}{\pi + 12k\pi} \quad \vee \quad a = \frac{6}{5\pi + 12k\pi}.
\end{aligned}$$

Notiamo che, essendo $a > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, dovrà essere $k \geq 0$, altrimenti si otterrebbe un valore di a negativo.
Osserviamo che $x \geq a$, pertanto dovrà anche essere $\frac{2}{\pi} \geq a$. Per la prima delle due espressioni si ottiene quindi:

$$\frac{6}{\pi(1 + 12k)} \leq \frac{2}{\pi} \to 2 + 24k \geq 6 \to k \geq \frac{1}{6} \to k \geq 1, \text{ essendo } k \in \mathbb{Z}.$$

© Zanichelli 2024

Per la seconda:

$$\frac{6}{\pi(5+12k)} \leq \frac{2}{\pi} \rightarrow 10+24k \geq 6 \rightarrow k \geq -\frac{1}{6} \rightarrow k \geq 0, \text{ essendo } k \in \mathbb{Z}.$$

Consideriamo infine che una frazione positiva, con il numeratore fissato, assume il valore massimo quando il denominatore è minimo. Pertanto, possiamo valutare la prima espressione in $k = 1$, ottenendo $a = \frac{6}{13\pi}$, e la seconda in $k = 0$, ottenendo $a = \frac{6}{5\pi}$.

Poiché $\frac{6}{5\pi} > \frac{6}{13\pi}$, concludiamo che il più grande valore di a per il quale $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ è $a = \frac{6}{5\pi}$.

 © Zanichelli 2024