
SECONDA PROVA DI MATEMATICA

20 giugno 2024

Svolgimento

Quesito 7

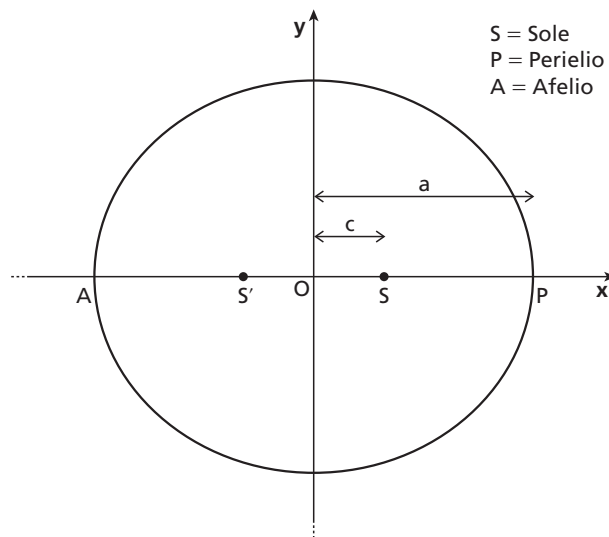
La prima legge di Keplero afferma che l'orbita dei pianeti è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

In un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo un'ellisse con centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse x :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cerchiamo i valori di a , b per i quali l'ellisse coincide con l'orbita della Terra.

Supponiamo che il Sole occupi il fuoco S di coordinate $(c, 0)$. Di conseguenza, l'afelio dell'orbita è il vertice A di coordinate $(-a, 0)$ e il perielio è il vertice P di coordinate $(a, 0)$.



Se come unità di misura scegliamo un segmento di lunghezza 10^{11} m, i dati del problema sono:

$$\overline{AS} = 1,52, \quad \overline{SP} = 1,47.$$

Inoltre, poiché il fuoco S' non occupato dal Sole ha coordinate $(-c, 0)$, vale la relazione $\overline{AS'} = \overline{SP}$. Quindi:

- $2a = \overline{AS} + \overline{SP} = 2,99$;
- $2c = \overline{AS} - \overline{AS'} = \overline{AS} - \overline{SP} = 0,05$.

Ricaviamo i valori di a^2 e b^2 , tenendo conto delle cifre significative:

- $a^2 = \left(\frac{2,99}{2}\right)^2 = 2,24$

$$\bullet b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{2,99}{2}\right)^2 - \left(\frac{0,05}{2}\right)^2 = 2,23.$$

Nel sistema di riferimento che abbiamo fissato, la traiettoria della Terra ha equazione

$$\frac{x^2}{2,24} + \frac{y^2}{2,23} = 1$$

che si può riscrivere anche come

$$2,23 \cdot x^2 + 2,24 \cdot y^2 = 5,00.$$

Notiamo che l'equazione della traiettoria è la stessa anche nel caso in cui il Sole occupi il fuoco S' .
Notiamo infine che, in alternativa, avremmo potuto fissare un sistema di riferimento in cui l'origine degli assi è occupata dal Sole. In questa ipotesi, avremmo ottenuto l'equazione di un'ellisse con i fuochi sull'asse x congruente a quella ricavata nello svolgimento sopra e traslata del vettore $\vec{v} = (-c, 0)$:

$$\frac{(x + 0,025)^2}{2,24} + \frac{y^2}{2,23} = 1.$$