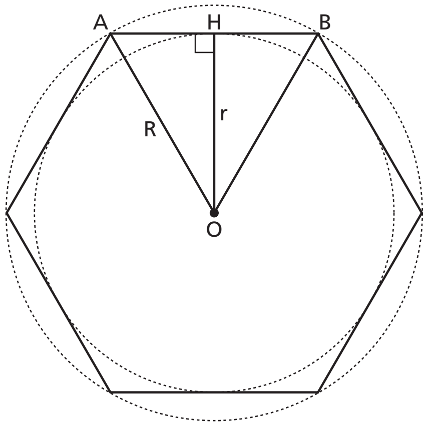
SECONDA PROVA DI MATEMATICA

20 giugno 2024

Svolgimento

Quesito 8

Indichiamo con R il raggio della circonferenza circoscritta e con r il raggio della circonferenza inscritta, ovvero l'apotema.



Il triangolo OAB è equilatero, perché i lati OA e OB sono congruenti in quanto raggi della circonferenza, e l'angolo $A\widehat{O}B$ ha ampiezza $\frac{360°}{6} = 60°$.

Tracciata l'altezza OH, abbiamo allora che $\overline{OA} = R$, $\overline{OH} = r$ e $\overline{AH} = \frac{R}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora otteniamo:

$$\overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 \rightarrow \left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Nel caso preso in esame dallo scrittore, si ha $R = 60\,\text{mm}$, quindi:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60\,\text{mm} = 30\sqrt{3}\,\text{mm} \simeq 51{,}96\,\text{mm} = 5{,}196\,\text{cm}.$$

Le misure riportate nel testo risultano quindi coerenti.

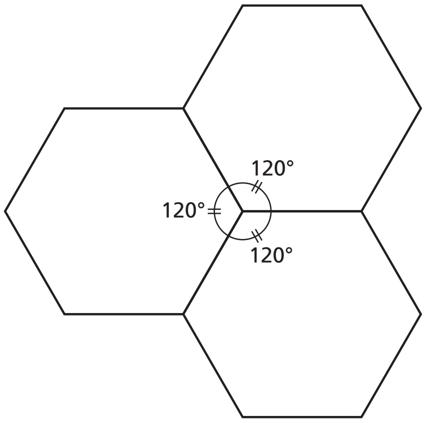
La possibilità di pavimentare (o tassellare) il piano con esagoni regolari congruenti segue dal fatto che l'ampiezza degli angoli interni dell'esagono regolare è:

$$\frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 120°,$$

che è un divisore di 360°.

In generale, è possibile tassellare il piano con poligoni regolari congruenti di n lati se e solo se l'ampiezza degli angoli interni, in gradi, è un divisore di 360°. Deve essere quindi verificata la condizione:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{360°}{k},$$



con k intero positivo. Isolando k dalla precedente relazione, otteniamo:

$$k = \frac{2n}{n-2}.$$

Riscriviamo la frazione nel modo seguente:

$$k = \frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Quindi k è un numero intero se e solo se $n-2$ è un divisore di 4. Le possibilità sono:

$$n-2 = -4, -2, -1, 1, 2, 4 \rightarrow n = -2, 0, 1, 3, 4, 6.$$

Non esistono poligoni con meno di 3 lati, quindi deve essere $n \geq 3$. Le uniche soluzioni accettabili sono quindi $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$. Ne deriva che i poligoni regolari, congruenti tra loro, con cui è possibile tassellare il piano sono tre: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.