Svolgimento del problema 1

1 Per $r > 0$ abbiamo $C_r : x^2 + y^2 = r^2$.

Per $k < 0$ abbiamo $f_k(x) = k|x| = \begin{cases} kx & \text{se } x \geq 0 \\ -kx & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Parte a

Poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f_k(x) = \lim_{x \to 0^-} (-kx) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = \lim_{x \to 0^+} (kx) = 0$$

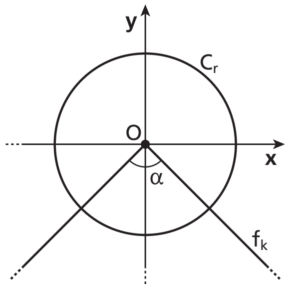
e $f_k(0) = 0$, la funzione è continua in $x = 0$ per ogni valore di $k < 0$.

Per studiare la derivabilità in $x = 0$, calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{k|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{k(-h)}{h} = -k, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{k|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{kh}{h} = k.$$

Poiché per ipotesi $k \neq 0$, i limiti destro e sinistro sono diversi, quindi il limite del rapporto incrementale non esiste e $f_k(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

Sia α la misura in radianti dell'angolo in O formato dai due rami del grafico di $y = f_k(x)$.



Le condizioni date sul settore circolare corrispondono al seguente sistema.

$$\begin{cases} \frac{\alpha r^2}{2} = \pi \\ 2r + \alpha r = 4 + \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha r^2 = 2\pi \\ \alpha = \frac{4+\pi-2r}{r} \end{cases}$$

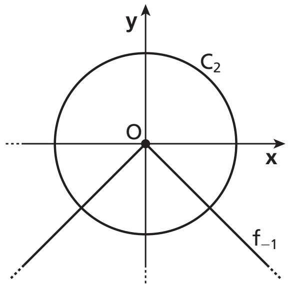
Sostituiamo l'espressione di α nella prima equazione e risolviamo.

$$\frac{4 + \pi - 2r}{r} \cdot r^2 = 2\pi \rightarrow (4 + \pi)r - 2r^2 = 2\pi \rightarrow 2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi = 0 \rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{16 + \pi^2 + 8\pi - 16\pi}}{4} = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}}{4} = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{(\pi - 4)^2}}{4} =$$
$$\frac{4 + \pi \pm (4 - \pi)}{4}$$

$r_1 = \dfrac{\pi}{2}$ e $r = 2$, quindi il valore maggiore di r che soddisfa le condizioni è $r = 2$.

Tracciamo il grafico di $C_2 : x^2 + y^2 = 4$ e di $f_{-1} : y = -|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.



Parte b

Studiamo la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Dominio

$$D : 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Simmetrie

$$g(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = g(x),$$

quindi g è una funzione pari, simmetrica rispetto all'asse y.

Intersezioni con gli assi

Asse x:

$$\sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow P_1(-2; 0), P_2(2; 0).$$

Asse y:

$$g(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2 \rightarrow Q(0; 2).$$

Segno

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

Comportamento agli estremi del dominio

La funzione non presenta asintoti.

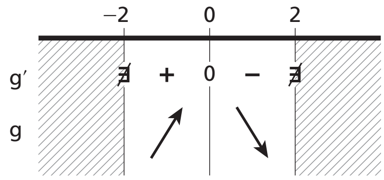
Derivata prima

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}},$$

quindi la derivata prima ha dominio $-2 < x < 2$ e si annulla in $x = 0$.

Studiamone il segno:

$$g'(x) > 0 \rightarrow \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \rightarrow -x > 0 \rightarrow x < 0.$$



Quindi g è crescente per $-2 < x < 0$, è decrescente per $0 < x < 2$ e ha un punto di massimo in $x = 0$.

Data la continuità e la monotonia della funzione, e poiché $g(-2) = g(2) = 0$, deduciamo che l'insieme immagine di g è $[0; 2]$.

Inoltre, g non è derivabile in $x = -2$ e in $x = 2$. In particolare,

$$\lim_{x\to-2^+} g'(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-} g'(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty,$$

quindi sono punti a tangente verticale.

Derivata seconda

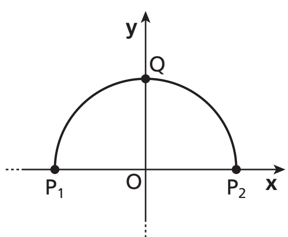
$$g''(x) = -\frac{\sqrt{4-x^2} - x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = -\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

Poiché il dominio è $D : -2 \le x \le 2$, $g''(x) < 0\ \forall x \in D$, quindi g volge sempre la concavità verso il basso.

Esplicitiamo l'equazione di C_2 rispetto a y:

$$y^2 = 4 - x^2 \to y = \pm\sqrt{4-x^2}.$$

Per $y \ge 0$ si ha $y = \sqrt{4-x^2}$, che coincide con $g(x)$.



La funzione g non è invertibile nel suo dominio perché non è iniettiva, per esempio $g(-1) = g(1) = \sqrt{3}$.

Sappiamo che se una funzione è monotòna in un intervallo, allora è iniettiva e quindi invertibile. Dallo studio della monotonia di g deduciamo quindi che è sicuramente invertibile negli intervalli $[-2; 0]$ e $[0; 2]$. Inoltre, tali intervalli sono massimali perché g è una funzione pari.

Poiché $b > 0$, l'intervallo cercato è $[0; 2]$.

Il grafico di g nel primo quadrante è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, quindi l'espressione analitica della funzione inversa h è la stessa di g:

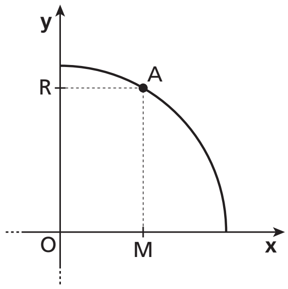
$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Alternativamente, si può calcolare esplicitando rispetto alla variabile x e poi scambiando il ruolo delle due variabili.

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{4 - y^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

Parte c

Il punto A ha coordinate $(x; \sqrt{4 - x^2})$.



L'area S del quadrilatero $AMOR$ quindi è:

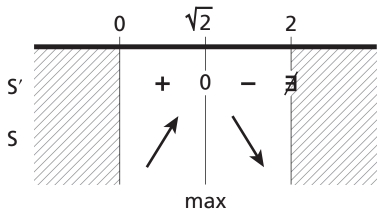
$$S(x) = x\sqrt{4 - x^2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2,$$

che è una funzione continua. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$S'(x) = \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$S'(x) > 0 \rightarrow \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \rightarrow 4 - 2x^2 > 0 \rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Tenendo in considerazione le limitazioni del problema, otteniamo il seguente quadro dei segni.



L'area quindi è massima per $x = \sqrt{2}$, cioè se A ha coordinate $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ e $AMOR$ è un quadrato.

Ripetiamo il procedimento con il perimetro p:

$$p(x) = 2x + 2\sqrt{4-x^2}, \quad 0 \le x \le 2;$$

$$p'(x) = 2 + 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$p'(x) > 0 \to 2 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \to 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \to \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \to \sqrt{4-x^2} - x > 0.$$

Mettendo a sistema con il dominio della funzione, abbiamo

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} > x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \to \begin{cases} 4-x^2 > x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2 > x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \to \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \to 0 \le x < \sqrt{2}.$$

Il quadro dei segni è lo stesso di $S'(x)$, quindi per $x = \sqrt{2}$ non solo l'area ma anche il perimetro è massimo.

Parte d

$$F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4-t^2}\,dt = \int_{-2}^{x} g(t)\,dt, \quad \text{con } x \in [-2; 2].$$

Dal grafico di g deduciamo che $F(2)$ rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 2:

$$F(2) = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi.$$

In alternativa, si può calcolare l'integrale per sostituzione. Poniamo $t = 2\sin u$, da cui $dt = 2\cos u\,du$. Quindi $u = \arcsin\frac{t}{2}$ e gli estremi dell'integrale diventano:

$$t_1 = -2 \to u_1 = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

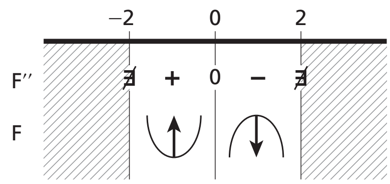
$$t_2 = 2 \to u_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Si ha quindi

$$F(2) = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-t^2}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sqrt{1-\sin^2 u} \cdot 2\cos u\right) du = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du =$$
$$4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = 4\left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\pi.$$

Ricordiamo che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F'(x) = g(x)$ $\forall x \in [-2; 2]$. Poiché $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [-2; 2]$, F è una funzione crescente.

Inoltre, $F''(x) = g'(x)$, quindi dal quadro dei segni di g' deduciamo la concavità di F.



F volge la concavità verso l'alto per $-2 < x < 0$ e verso il basso per $0 < x < 2$. In $x = 0$ presenta un punto di flesso discendente, con tangente inflessionale di equazione:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0).$$

Ricordiamo che $F'(0) = g(0) = 2$. Per calcolare $F(0)$, ricordiamo l'interpretazione geometrica dell'integrale e deduciamo che corrisponde a metà dell'area del semicerchio descritto dalla funzione g, cioè $F(0) = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Quindi la tangente inflessionale ha equazione:

$$y - \pi = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x + \pi.$$

Abbiamo le informazioni necessarie a tracciare il grafico qualitativo di $y = F(x)$.