Svolgimento del problema 2

Parte a

Poiché i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono di secondo grado, possiamo scrivere

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

dove $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sono numeri reali, con $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

Di conseguenza le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ assumono la forma

$$f(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{a_2x^2+a_1x+a_0}$$
$$g(x) = (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{a_2x^2+a_1x+a_0}$$

Per quanto riguarda $f(x)$, in base alle informazioni fornite dal testo e deducibili dal grafico, sappiamo che $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f'(\varphi) = 0$.
Mettiamo a sistema le prime due condizioni:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0e^{a_0} = 0 \\ (a_2 + a_1 + a_0)e^{a_2+a_1+a_0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 \end{cases}.$$

Possiamo quindi riscrivere $f(x)$ nella forma $f(x) = (a_2x^2 - a_2x)e^{a_2x^2-a_2x}$.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$, che ci servirà per imporre la terza condizione:

$$\begin{aligned} f'(x) =&(2a_2x - a_2)e^{a_2x^2-a_2x} + (a_2x^2 - a_2x)(2a_2x - a_2)e^{a_2x^2-a_2x} = \\ &a_2(2x - 1)(a_2x^2 - a_2x + 1)e^{a_2x^2-a_2x}. \end{aligned}$$

Imponiamo la terza condizione:

$$f'(\varphi) = 0 \rightarrow a_2(2\varphi - 1)(a_2\varphi^2 - a_2\varphi + 1)e^{a_2\varphi^2-a_2\varphi} = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, almeno uno dei quattro fattori deve essere uguale a zero. Poiché $a_2 \neq 0$, $2\varphi - 1 \neq 0$ ed $e^{a_2\varphi^2-a_2\varphi} \neq 0$ (perché l'esponenziale è sempre positivo), la terza condizione si riduce a:

$$a_2\varphi^2 - a_2\varphi + 1 = 0 \rightarrow a_2(\varphi^2 - \varphi) = -1.$$

Osservato che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, otteniamo:

$$a_2\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = -1 \rightarrow a_2 = -1.$$

Concludiamo che $p(x) = -x^2 + x$.

Per quanto riguarda $g(x)$, in base alle informazioni fornite dal testo e deducibili dal grafico, sappiamo che $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$ (perché il punto $C(0; 1)$ è un punto stazionario) e $g(-\varphi) = 0$.
Dalla prima informazione otteniamo immediatamente che deve essere $b_0 = 1$.
Riscriviamo quindi $g(x)$ tenendo conto dei valori già determinati per a_0, a_1, a_2 e b_0 e calcoliamo la sua derivata, che ci servirà per imporre la seconda condizione:

$$g(x) = (b_2x^2 + b_1x + 1)e^{-x^2+x};$$
$$g'(x) = (2b_2x + b_1)e^{-x^2+x} + (b_2x^2 + b_1x + 1)(1 - 2x)e^{-x^2+x}.$$

Imponendo la seconda condizione, otteniamo:

$$g'(0) = 0 \to b_1 + 1 = 0 \to b_1 = -1.$$

Possiamo quindi riscrivere

$$g(x) = (b_2x^2 - x + 1)e^{-x^2+x}.$$

Applichiamo infine la terza condizione per ricavare b_2:

$$g(-\varphi) = 0 \to (b_2\varphi^2 + \varphi + 1)e^{-\varphi^2-\varphi} = 0 \to b_2\varphi^2 + \varphi + 1 = 0 \to b_2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = 0$$
$$\to b_2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0 \to (b_2 + 1) \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0 \to b_2 = -1.$$

Concludiamo che $q(x) = -x^2 - x + 1$.

Parte b

Studiamo la funzione $f(x) = (x - x^2)e^{x-x^2}$.

- Il dominio è $\mathbb{R}$ e la funzione qui risulta continua e derivabile.
- Studiamo le eventuali simmetrie:
  $f(-x) = (-x - x^2)e^{-x-x^2} \neq \pm f(x)$, quindi $f(x)$ non è né pari né dispari.
- Poiché $f(0) = 0$, l'unica intersezione della curva con l'asse y è l'origine $(0; 0)$.

  Troviamo le intersezioni con l'asse x:

  $$\begin{cases} y = 0 \\ (x - x^2)e^{x-x^2} = 0 \to (x - x(1 - x) = 0 \to x = 0 \vee x = 1 \end{cases}.$$

  I punti di intersezione della curva con gli assi sono quindi $(0; 0)$ e $(1; 0)$.
- Studiamo il segno della funzione.

  $$f(x) > 0 \to (x - x^2)e^{x-x^2} > 0 \to x - x^2 > 0 \to 0 < x < 1.$$

		0		1	
f(x)	−	0	+	0	−

- Per individuare gli asintoti, calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

  $$\lim_{x\to\pm\infty}(x-x^2)e^{x-x^2}.$$

  Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Possiamo risolverlo applicando il teorema di De L'Hospital, dopo averlo ricondotto alla forma $\frac{\infty}{\infty}$.

  $$\lim_{x\to\pm\infty}(x-x^2)e^{x-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-x^2}{e^{x^2-x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{(2x-1)e^{x^2-x}}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{e^{x^2-x}}=0$$

  In alternativa, possiamo risolverlo con un cambio di variabile, ponendo $t=x^2-x$:

  $$\lim_{x\to\pm\infty}(x-x^2)e^{x-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-x^2}{e^{x^2-x}}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{t}{e^t}=0\cdot$$

  Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

  Poiché tale asintoto orizzontale è sia destro sia sinistro, non esistono asintoti obliqui.

  Inoltre, non esistono nemmeno asintoti verticali, perché il dominio di $f(x)$ coincide con l'insieme $\mathbb{R}$.

- Per ricercare i punti stazionari e determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza, calcoliamo la derivata prima.

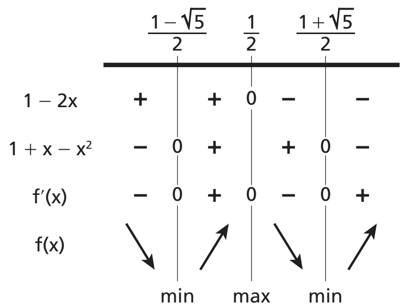
  $$f'(x)=(-2x+1)e^{x-x^2}+(x-x^2)(1-2x)e^{x-x^2}=(1-2x)(1+x-x^2)e^{x-x^2}$$

  Studiamo il segno di $f'(x)$, esaminando il segno dei suoi fattori:

  $$1-2x>0\to x<\frac{1}{2};$$

  $$1+x-x^2>0\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

  $$e^{x-x^2}>0\to\forall x\in\mathbb{R}.$$



Le ascisse dei punti stazionari sono quindi $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Deduciamo che $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ sono punti di minimo assoluto e $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo assoluto. Sostituiamo i valori nella funzione per determinare le ordinate dei minimi e del massimo:

$$f\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{e},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{e}}{4}.$$

L'insieme immagine è quindi $\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{1}{e}; \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right]$.

- Per studiare la convessità, calcoliamo la derivata seconda.

  Possiamo scrivere la derivata prima nella forma $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - x + 1)e^{x-x^2}$; abbiamo perciò

$$f''(x) = (6x^2 - 6x - 1)e^{x-x^2} + (2x^3 - 3x^2 - x + 1)(1 - 2x)e^{x-x^2} =$$
$$(-4x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 9x)e^{x-x^2} = x(-4x^3 + 8x^2 + 5x - 9)e^{x-x^2}.$$

  Notiamo che $x = 1$ è uno zero del polinomio $-4x^3 + 8x^2 + 5x - 9$. Con la regola di Ruffini possiamo quindi scomporre il polinomio come $(x - 1)(-4x^2 + 4x + 9)$.

	−4	8	5	−9
1		−4	4	9
	−4	4	9	0

  Pertanto:

$$f''(x) = x(x - 1)(-4x^2 + 4x + 9)e^{x-x^2}.$$

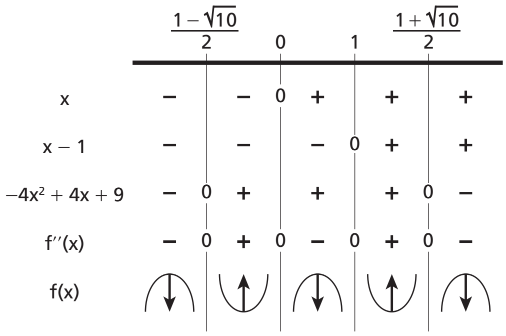
  Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$x > 0;$$

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1;$$

$$-4x^2 + 4x + 9 > 0 \rightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{10}}{2};$$

$$e^{x-x^2} > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$$



Quindi le ascisse dei punti di flesso sono $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$.

- Verifichiamo che la funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$.

  Scriviamo le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$:

  $$\begin{cases} x' = 2 \cdot \frac{1}{2} - x \\ y' = y \end{cases} \quad \to \begin{cases} x = 1 - x' \\ y = y' \end{cases}$$

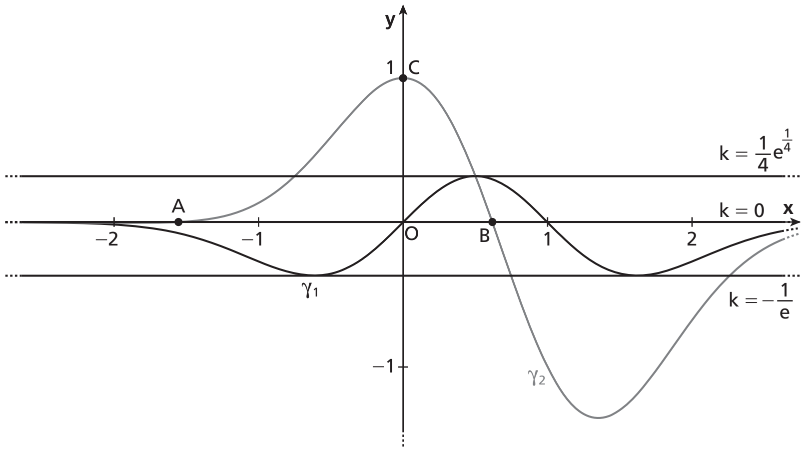
  Applichiamo la simmetria alla curva $y = f(x)$:

  $$y' = f(1 - x') \to y' = \left(1 - x' - (1 - x')^2\right) e^{1 - x' - (1 - x')^2} \to y' = \left(x' - x'^2\right) e^{x' - x'^2}.$$

  La curva trasformata coincide con la curva di partenza, quindi la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$.

- Indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, equivale a determinare il numero di intersezioni fra il grafico di $f(x)$ e la retta $y = k$. Dal grafico deduciamo che:

  - ◇ nessuna soluzione per $k < -\frac{1}{e} \vee k > \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$;
  - ◇ 1 soluzione (di molteplicità 2) per $k = \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$;
  - ◇ 2 soluzioni per $0 \leq k < \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$;
  - ◇ 2 soluzioni (ciascuna di molteplicità 2) per $k = -\frac{1}{e}$;
  - ◇ 4 soluzioni per $-\frac{1}{e} < x < 0$.



Parte c

Cerchiamo gli zeri della funzione $g(x) = (1 - x - x^2)e^{x-x^2}$:

$$(1 - x - x^2)e^{x-x^2} = 0 \rightarrow 1 - x - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Osserviamo che $x_1 = -\varphi$. Calcoliamo $\frac{1}{\varphi}$:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = x_2.$$

Dunque $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g.

Per quanto ricavato in precedenza, abbiamo $A(-\varphi; 0)$, $B\left(\frac{1}{\varphi}; 0\right)$ e $C(0; 1)$.

Per verificare che il triangolo ABC è rettangolo, è sufficiente verificare che le rette AC e BC sono perpendicolari.

Calcoliamo i coefficienti angolari delle due rette:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-0}{0+\varphi} = \frac{1}{\varphi},$$
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-0}{0-\frac{1}{\varphi}} = -\varphi.$$

Poiché $m_{AC} \cdot m_{BC} = \frac{1}{\varphi} \cdot (-\varphi) = -1$, le rette sono perpendicolari e quindi il triangolo è rettangolo in C.

Osserviamo che, in alternativa, è possibile verificare che il triangolo è rettangolo verificando che $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (inverso del teorema di Pitagora).

Per determinare le coordinate del punto di intersezione di γ_1 e γ_2 risolviamo l'equazione:

$$f(x) = g(x) \rightarrow (x - x^2)e^{x-x^2} = (1 - x - x^2)e^{x-x^2} \rightarrow x - x^2 = 1 - x - x^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Notiamo che il punto di intersezione ottenuto coincide con il massimo della funzione $f(x)$, e quindi ha coordinate $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right)$.

Consideriamo i punti $P_1(x; f(x))$ e $P_2(x; g(x))$, con $x \geq \frac{1}{2}$. Indichiamo con $h(x)$ la distanza tra P_1 e P_2 in funzione di x:

$$h(x) = \overline{P_1P_2} = |f(x) - g(x)| = \left|(x - x^2)e^{x-x^2} - (1 - x - x^2)e^{x-x^2}\right| = |2x - 1|e^{x-x^2}.$$

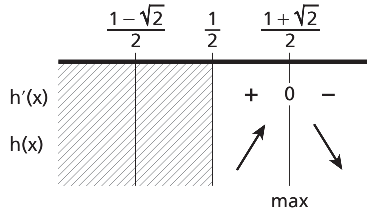
Poiché $x \geq \frac{1}{2}$ abbiamo $2x - 1 \geq 0$, quindi $h(x) = (2x - 1)e^{x-x^2}$. Per determinare il massimo di $h(x)$ calcoliamo la sua derivata prima:

$$h'(x) = 2e^{x-x^2} + (2x - 1)(1 - 2x)e^{x-x^2} = (-4x^2 + 4x + 1)e^{x-x^2}.$$

Studiamo il segno della derivata, esaminando il segno dei suoi fattori:

$$-4x^2 + 4x + 1 > 0 \rightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

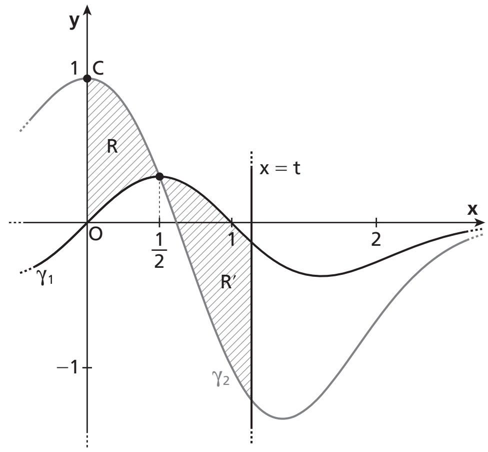
$$e^{x-x^2} > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$$



Il massimo si ottiene quindi per $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo questo valore nell'espressione analitica di $h(x)$ otteniamo la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2:

$$h\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}}.$$

Parte d



L'area della regione R mostrata in figura è:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)e^{x-x^2}\,dx=\left[e^{x-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}-1=\sqrt[4]{e}-1.$$

L'area della regione R' (in funzione di t) è:

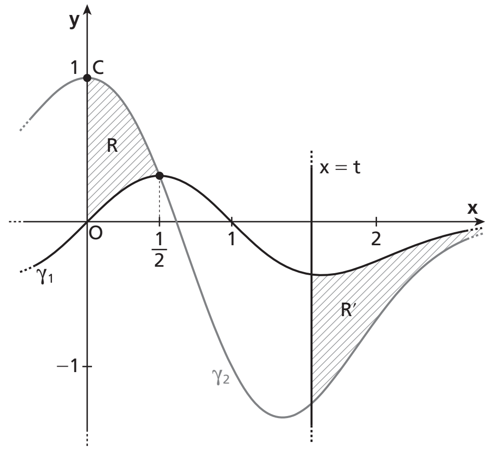
$$\int_{\frac{1}{2}}^{t}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{t}-(1-2x)e^{x-x^2}\,dx=\left[-e^{x-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{t}=\sqrt[4]{e}-e^{t-t^2}.$$

Uguagliamo le aree delle regioni R e R' per determinare t:

$$\sqrt[4]{e}-1=\sqrt[4]{e}-e^{t-t^2}\rightarrow e^{t-t^2}=1\rightarrow t-t^2=0\rightarrow t=0\vee t=1.$$

Poiché deve essere $t\geq\frac{1}{2}$, l'unica soluzione accettabile è $t=1$.

Osserviamo che avremmo potuto interpretare diversamente il testo del problema, considerando come R' la regione illimitata indicata in figura.



L'area di questa regione è

$$\int_t^{+\infty} (f(x) - g(x))\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-e^{x-x^2}\right]_t^M = \lim_{M\to+\infty} \left(-e^{M-M^2} + e^{t-t^2}\right) = e^{t-t^2}.$$

Uguagliamo all'area di R:

$$e^{t-t^2} = \sqrt[4]{e} - 1 \to t - t^2 = \ln(\sqrt[4]{e} - 1) \to t^2 - t + \ln(\sqrt[4]{e} - 1) = 0 \xrightarrow{t \geq \frac{1}{2}} t = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(\sqrt[4]{e} - 1)}}{2}.$$