
SECONDA PROVA DI MATEMATICA

19 giugno 2025

Svolgimento

Quesito 3

Studiamo la continuità. La funzione polinomiale $y = -4x^2 - 8x$ è continua nel suo dominio $\mathbb{R}$. In particolare, la funzione $f(x)$ è continua in $-1 \leq x < 0$.

La funzione $y = 1 + \tan(x + \frac{3}{4}\pi)$ è continua nel suo dominio, dato da:

$$x + \frac{3}{4}\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, la funzione $f(x)$ è continua in $0 < x \leq 2$.

Studiamo la continuità della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-4x^2 - 8x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \right] = 1 + (-1) = 0;$$

$$f(0) = -4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 = 0.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la funzione $f(x)$ è continua anche in $x = 0$. Quindi, essa è continua in tutto l'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.

Studiamo la derivabilità. La funzione polinomiale $y = -4x^2 - 8x$ è derivabile nel suo dominio $\mathbb{R}$. In particolare, la funzione $f(x)$ è derivabile in $-1 \leq x < 0$.

La funzione $y = 1 + \tan(x + \frac{3}{4}\pi)$ è derivabile nel suo dominio, con derivata:

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + \frac{3}{4}\pi)}.$$

Per semplificare i calcoli nel seguito dello svolgimento, applichiamo l'identità $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ e otteniamo l'espressione alternativa:

$$y' = 1 + \tan^2(x + \frac{3}{4}\pi).$$

In particolare, la funzione $f(x)$ è derivabile in $0 < x \leq 2$.

Per studiare la derivabilità della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$, calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale:

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-4h - 8) = -8;$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \tan\left(h + \frac{3}{4}\pi\right)}{h}.$$

Il secondo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di De L'Hospital, abbiamo:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \tan^2\left(h + \frac{3}{4}\pi\right)}{1} = 1 + (-1)^2 = 2.$$

Poiché $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ e le derivate sono entrambe finite, la funzione $f(x)$ non è derivabile nel punto $x = 0$, che corrisponde a un punto angoloso per la funzione.

Tracciamo il grafico. Osserviamo che la funzione $y = -4x^2 - 8x$ ha per grafico una parabola. Poiché $a = -4 < 0$, la concavità della parabola è rivolta verso il basso.

Determiniamo le coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{-8} = -1;$$

$$y_V = -4 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) = -4 + 8 = 4.$$

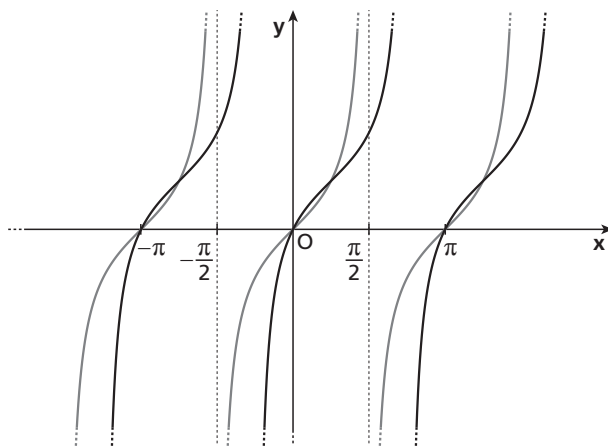
Dunque la parabola ha vertice $V(-1; 4)$.

Determiniamo le intersezioni tra la parabola e l'asse x :

$$\begin{cases} y = -4x^2 - 8x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x^2 - 8x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Dunque la parabola passa per $A(-2; 0)$ e $O(0; 0)$.

Il grafico della funzione $y = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ si può ottenere da quello della funzione $y = \tan x$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{3}{4}\pi; 1\right)$, come mostrato in figura.



Rappresentiamo la parabola di equazione $y = -4x^2 - 8x$ per $-1 \leq x \leq 0$ e il grafico della funzione $y = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ per $0 < x \leq 2$. Otteniamo il grafico a pagina successiva.

