SECONDA PROVA DI MATEMATICA
19 giugno 2025

Svolgimento

Quesito 4

Chiamiamo $f(x) = g(x)\sin^2 x$.

Il punto P di intersezione tra la retta cercata e la curva $y = f(x)$ ha coordinate $\left(\frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Calcoliamo:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

La retta normale alla curva nel punto P è perpendicolare alla retta tangente alla curva $y = f(x)$ in P. Poiché la retta tangente in P ha coefficiente angolare $f'(\frac{\pi}{4})$, la retta normale in P ha coefficiente angolare $-\frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})}$.
Calcoliamo:

$$f'(x) = \left(g(x)\sin^2 x\right)' = g'(x)\sin^2 x + g(x)\cdot 2\sin x\cos x,$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =& g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ & 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 2 = 3, \end{aligned}$$

quindi il coefficiente angolare della retta normale alla curva $y = f(x)$ in P è $-\frac{1}{3}$.

La retta cercata passa per $P(\frac{\pi}{4}; 1)$ e ha coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$, quindi ha equazione:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1 + \frac{\pi}{12}.$$