SECONDA PROVA DI MATEMATICA
19 giugno 2025
Svolgimento

Quesito 5

Affinché i grafici delle funzioni $y = f(x) = e^x$ e $y = g(x) = 6 - ke^{-x}$ siano tangenti tra loro, dev'essere verificato il sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Poiché $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = ke^{-x}$, si ha:

$$\begin{cases} e^x = 6 - ke^{-x} \\ e^x = ke^{-x} \end{cases}$$

Possiamo risolvere il sistema isolando k nella seconda equazione e sostituendo nella prima:

$$\begin{cases} e^x = 6 - e^x \\ k = e^{2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2e^x = 6 \\ k = e^{2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ k = 9 \end{cases} .$$

In alternativa, il sistema si può risolvere anche sostituendo $e^x = ke^{-x}$ nella prima equazione:

$$\begin{cases} ke^{-x} = 6 - ke^{-x} \\ e^x = ke^{-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ke^{-x} = 3 \\ e^x = ke^{-x} \end{cases} ,$$

da cui si ricava $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$, ottenendo quindi lo stesso risultato.

Concludiamo che i grafici delle due funzioni sono tangenti tra loro per $k = 9$, e l'ascissa del punto di tangenza è $x_0 = \ln 3$. L'ordinata y_0 del punto di tangenza si ottiene sostituendo il valore di x_0 nell'espressione di una delle due funzioni:

$$y_0 = e^{x_0} = e^{\ln 3} = 3.$$

Quindi il punto di contatto ha coordinate $(\ln 3; 3)$.