SECONDA PROVA DI MATEMATICA

19 giugno 2025

Svolgimento

Quesito 6

Sia la retta sia il grafico di f passano per il punto di tangenza T, che ha ascissa zero. Determiniamo l'ordinata di T sostituendo $x = 0$ nell'equazione della retta:

$$y_T = 2x_T + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Affinché il grafico della funzione $y = f(x)$ sia tangente alla retta di equazione $y = 2x + 3$ nel punto $T(0; 3)$ deve essere:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 2 \end{cases}.$$

Dobbiamo quindi trovare una funzione polinomiale che soddisfi il sistema seguente.

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 2 \\ \int_0^3 f(x)dx = 9 \end{cases}$$

Osserviamo che la retta assegnata non risolve il sistema. Infatti:

$$\int_0^3 (2x+3)dx = \left[x^2 + 3x\right]_0^3 = 18 \neq 9,$$

quindi f non può essere un polinomio di grado 1.
Supponiamo che f sia un polinomio di grado 2 e imponiamo che soddisfi il sistema.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0; \qquad f'(x) = 2ax + b;$$

$$f(0) = 3 \rightarrow c = 3 \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3;$$

$$f'(0) = 2 \rightarrow b = 2 \rightarrow f(x) = ax^2 + 2x + 3.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (ax^2 + 2x + 3)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 = 9a + 9 + 9 = 9a + 18.$$

Deve essere quindi:

$$\int_0^3 f(x)dx = 9 \rightarrow 9a + 18 = 9 \rightarrow a = -1.$$

Pertanto, la funzione $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ è una funzione polinomiale che soddisfa le condizioni date.

Consideriamo il caso generale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con $n \geq 2$, e imponiamo le condizioni date. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Imponendo le condizioni, otteniamo:

$$f(0) = 3 \rightarrow a_0 = 3,$$

$$f'(0) = 2 \rightarrow a_1 = 2.$$

Risulta quindi $f(x) = a_n x^n + \ldots + 2x + 3$.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \ldots + \frac{a_2 x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 =$$
$$\frac{a_n \cdot 3^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} \cdot 3^n}{n} + \ldots + \frac{a_2 \cdot 3^3}{3} + 9 + 9.$$

Ponendo $\int_0^3 f(x)dx = 9$ otteniamo

$$\frac{a_n \cdot 3^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} \cdot 3^n}{n} + \ldots + \frac{a_2 \cdot 3^3}{3} + 9 + 9 = 9 \rightarrow \frac{a_n \cdot 3^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} \cdot 3^n}{n} + \ldots + \frac{a_2 \cdot 3^3}{3} = -9$$

e, dividendo tutti i termini per 9:

$$\frac{a_n \cdot 3^{n-1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} \cdot 3^{n-2}}{n} + \ldots + a_2 = -1.$$

Qualunque scelta di coefficienti $a_2, \ldots, a_n$ che soddisfa questa equazione corrisponde a una funzione $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + 2x + 3$ che soddisfa le condizioni richieste.

Per esempio, ponendo $a_2 = -1$ e $a_3 = \ldots = a_n = 0$ si ottiene il polinomio di grado 2 trovato in precedenza.

Vediamo un altro esempio. Per un polinomio di terzo grado $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + 2x + 3$, la condizione da porre sarebbe:

$$\frac{a_3 \cdot 3^2}{4} + a_2 = -1 \rightarrow \frac{9a_3}{4} + a_2 = -1 \rightarrow a_2 = -\frac{9}{4}a_3 - 1.$$

Posto per esempio $a_3 = 4$, risulta $a_2 = -10$ e si ottiene il polinomio:

$$f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 2x + 3.$$