ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente e x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$

calcolare una primitiva della funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

PROBLEMA 2

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:

– il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
– lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
– la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° con il piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base $ABCD$ della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

QUESTIONARIO

1 Si consideri la seguente equazione in x, y:

$$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0,$$

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

A è una circonferenza per ogni valore di k.

B è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$.

C è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$.

D non è una circonferenza qualunque sia k.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2 Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a 1 e giustificare la risposta.

3 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

4 Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} 2x & \text{per } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] \dfrac{1+a}{\operatorname{sen} x} & \text{per } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$.

5 Un titolo di borsa ha perso ieri l'x% del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y%, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

6 Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a; b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7 Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+4}$ è:

A $\ln \dfrac{x}{x+2}$. B $\ln \dfrac{x+2}{x}$. C $\ln \sqrt{x^2+2x}$. D $\ln \sqrt{2x^2+x}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8 S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$, è:

A costante. B crescente. C decrescente.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9 Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10 Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?

b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?

c) Le rette a, b sono comunque parallele?

d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Se un polinomio $f(x)$ si divide per un polinomio $h(x)$ di grado inferiore o uguale, esso può essere sempre scritto come $f(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$, dove $q(x)$ e $r(x)$ sono rispettivamente il polinomio quoziente e il polinomio resto. Nel nostro caso, $f(x) = x(x^2 - 1) + x$, pertanto $f(x) = x^3$.

b) Indicata con $g(x)$ la funzione $y = \dfrac{f(x)}{x^2 - 1}$, risulta $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Essa è dispari poiché $g(-x) = -g(x)$ e quindi il grafico G è simmetrico rispetto all'origine O del sistema cartesiano. La curva interseca gli assi solamente nel punto (0; 0); la funzione è positiva per $-1 < x < 0$ o $x > 1$ e negativa per $x < -1$ o $0 < x < 1$. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza, ovvero per $x \to \pm\infty$ e $x \to \pm 1$:

$$\lim_{x \to \pm 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Perciò le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

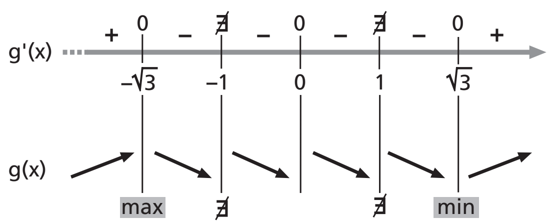
Inoltre vale $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$. Verifichiamo se esiste un eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Ne segue che la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.
Studiamo ora la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Tale derivata si annulla in $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$ ed è positiva per $x < -\sqrt{3}$ o $x > \sqrt{3}$. Riassumiamo il quadro dei segni nella figura 1.
La funzione è crescente per $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$, presenta un massimo per $x = -\sqrt{3}$, con $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, e un minimo per $x = \sqrt{3}$, con $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. Altrimenti è decrescente.

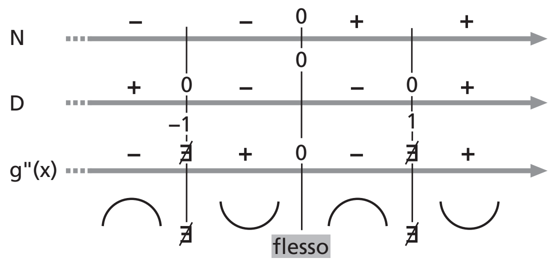


▲ **Figura 1.**

Calcoliamo la derivata seconda.

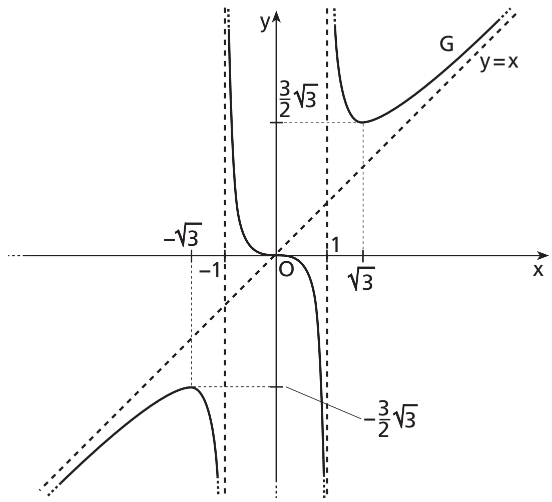
$$g''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Essa si annulla solo in $x=0$ e $g''(x)>0$ per $x<-1$ $\vee$ $x>1$. Lo schema di figura 2 riassume il segno.



▶ **Figura 2.**

La funzione g presenta un unico punto di flesso in corrispondenza dell'origine. Il grafico G della funzione è il seguente.



▶ **Figura 3.**

c) Il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ ha ordinata $y=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{6}$. La retta t ha coefficiente angolare $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{9}$. La sua equazione è dunque:

$$y+\frac{1}{6}=-\frac{11}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad\rightarrow\quad y=-\frac{11}{9}x+\frac{4}{9}.$$

d) Per determinare i punti comuni alla retta t e al grafico G consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{11}{9}x+\dfrac{4}{9} \\ y=\dfrac{x^3}{x^2-1} \end{cases}$$

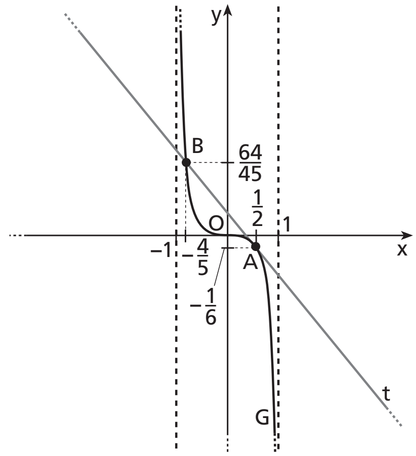
Confrontando le due equazioni si ottiene l'equazione risolvente:

$$-\frac{11}{9}x+\frac{4}{9}=\frac{x^3}{x^2-1} \quad\rightarrow\quad 20x^3-4x^2-11x+4=0.$$

Sappiamo che $x=\frac{1}{2}$ è soluzione. Applichiamo la regola di Ruffini e ricaviamo:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(20x^2+6x-8)=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{4}{5}.$$

Sostituendo tali ascisse all'equazione della retta otteniamo che i punti comuni alla retta t e alla curva G sono: $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$ e $B\left(-\frac{4}{5}; \frac{64}{45}\right)$. Nella figura 4 è rappresentato un particolare del grafico G e della retta t.



▶ **Figura 4.**

e) $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} \rightarrow \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{(a+b)x - a + b}{x^2-1}$

Per l'identità dei polinomi uguagliamo i coefficienti dei polinomi al numeratore:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=0 \end{cases} \rightarrow \quad a=b=\frac{1}{2}.$$

Dunque $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Compiendo la divisione tra polinomi si trova:

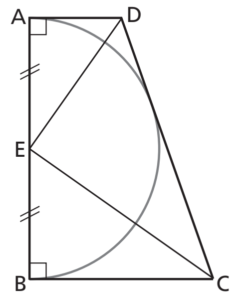
$$y = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Una primitiva di tale funzione è:

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c.$$

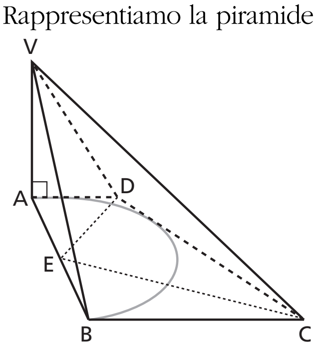
PROBLEMA 2

a) Costruiamo il trapezio rettangolo $ABCD$, base della piramide (figura 5).
Per il teorema relativo alle tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno si ha che ED e CE sono le bisettrici rispettivamente degli angoli $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$. Inoltre $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ sono supplementari in quanto coniugati interni delle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale DC. La somma degli angoli $E\hat{D}C$ e $D\hat{C}E$ è allora un angolo retto poiché sono rispettivamente la metà di due angoli supplementari. Ne segue che l'angolo $D\hat{E}C$ è retto e il triangolo DEC è rettangolo in E.



▲ **Figura 5.**

b) Rappresentiamo la piramide di base $ABCD$ e vertice V (figura 6).



◀ **Figura 6.**

Per il teorema delle tre perpendicolari, la retta VB è perpendicolare alla retta BC e quindi l'angolo formato dalla faccia BCV con il piano di base è $A\hat{B}V = 45°$.

Il triangolo rettangolo ABV è, allora, isoscele con entrambi gli angoli acuti di 45°. Ne segue che $\overline{AB} = \overline{AV} = 2a$. In particolare a è la misura del raggio della semicirconferenza inscritta al trapezio.

Per il teorema sui quadrilateri circoscritti a una circonferenza si ha che $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{DC}$ e, poiché $BC = 2AD$, risulta $DC = 3AD$. Per il teorema di Pitagora vale $\overline{AB} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{AD}^2} = 2\sqrt{2}\ \overline{AD}$ e quindi risulta:

$$2a = 2\sqrt{2}\ \overline{AD} \rightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Pertanto risulta $\overline{BC} = \sqrt{2}\,a$ e $\overline{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2} a$.

Il perimetro del trapezio vale:

$$2p_{ABCD} = 2a + \frac{\sqrt{2}}{2} a + \sqrt{2}\,a + \frac{3\sqrt{2}}{2} a = (2 + 3\sqrt{2})a$$

e l'area:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{BC}\right) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a + \sqrt{2}\,a\right) \cdot 2a = \frac{3\sqrt{2}}{2} a^2.$$

c) Consideriamo il trapezio rettangolo $A'B'C'D'$ ottenuto tagliando la piramide con un piano parallelo alla base. Proiettando tale poligono sul piano $ABCD$ otteniamo il prisma di base $A'B'C'D'$ e altezza AA'.

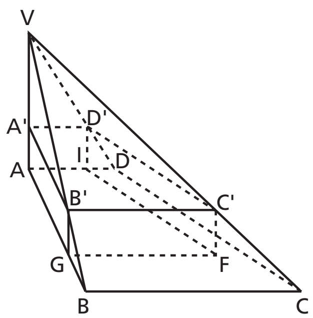


Figura 7.

Sia $x = \overline{AA'}$. Ne segue che $\overline{VA'} = \overline{A'B'} = \overline{VA} - x = 2a - x$. Inoltre, poiché i poligoni $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono simili, il rapporto tra le loro aree è uguale al quadrato del rapporto dei loro lati corrispondenti.

Quindi, $\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)^2$. Ne segue:

$$A_{A'B'C'D'} = A_{ABCD} \cdot \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} a^2 \cdot \frac{(2a - x)^2}{4a^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x^2 - 4ax + 4a^2).$$

Il volume del prisma pertanto vale:

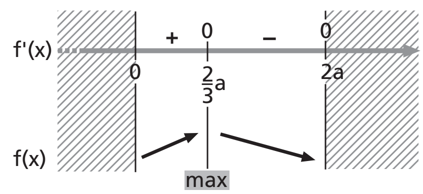
$$V = A_{A'B'C'D'} \cdot \overline{AA'} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x^2 - 4ax + 4a^2) \cdot x = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x^3 - 4ax^2 + 4a^2x).$$

Dobbiamo ora determinare il punto di massimo della funzione $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x^3 - 4ax^2 + 4a^2x)$ nell'intervallo $]0; 2a[$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{2}}{8}(3x^2 - 8ax + 4a^2).$$

Essa si annulla per $x=\frac{2}{3}a$ o $x=2a$. Lo schema seguente (figura 8) ne riassume il segno.

Il volume massimo del prisma si ottiene perciò per $x=\frac{2}{3}a$.



▲ **Figura 8.**

d) Il rapporto tra i perimetri dei poligoni $A'B'C'D'$ e $ABCD$ è uguale al rapporto tra i lati corrispondenti nella similitudine.

Quindi $\frac{2p_{A'B'C'D'}}{2p_{ABCD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Ne segue:

$$2p_{A'B'C'D'}=2p_{ABCD}\cdot\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=(2+3\sqrt{2})a\cdot\frac{2a-x}{2a}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}(2a-x).$$

L'area laterale del prisma vale:

$$A_{lat}=2p_{A'B'C'D'}\cdot\overline{AA'}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}(2ax-x^2).$$

Per determinare quale valore di $x\in]0;2a[$ rende massima la funzione $y=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}(2ax-x^2)$, calcoliamo la sua derivata prima:

$$y'=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}(2a-2x)=(2+3\sqrt{2})(a-x).$$

Essa si annulla in $x=a$, è positiva per $x<a$ e negativa per $x>a$. Quindi il prisma ha la massima area laterale per $\overline{AA'}=a$ e non per $\overline{AA'}=\frac{2}{3}a$.

QUESTIONARIO

1 Utilizziamo il metodo del completamento del quadrato per scrivere l'equazione nella forma seguente:

$$2x^2+2y^2+x+y+k=0\rightarrow x^2+y^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{k}{2}=0\ \rightarrow\ \left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1-4k}{8}.$$

Tale equazione rappresenta una circonferenza di centro $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ e raggio $\sqrt{\frac{1-4k}{8}}$ se e solo se $1-4k>0$, cioè se $k<\frac{1}{4}$. La risposta esatta è C.

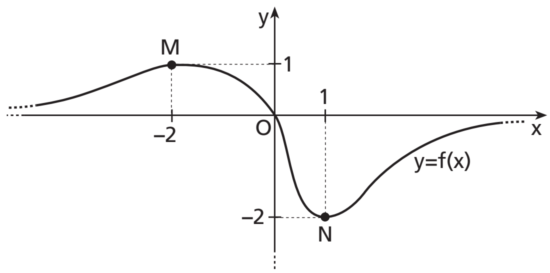
2 Il campo di esistenza D della funzione f è dato dalle condizioni:

$$\begin{cases}x-1\geq 0\\1-x\geq 0\end{cases},\ \text{cioè } D=\{1\}.$$

D non ha punti di accumulazione: non esiste il limite per x che tende a 1, in quanto punto isolato del campo di esistenza.

3 Essendo f derivabile su tutto l'asse reale, essa è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $f(x)$ tende a 0 per $x\rightarrow\pm\infty$, la funzione è limitata. Ammette massimo e minimi assoluti nei punti rispettivamente $x=-2$ e $x=1$. Poiché $f(x)=0$ solo in $x=0$ e $f(-2)=1$, $f(1)=-2$, per il teorema di esistenza degli zeri ne segue che $f(x)>0$ per $x<0$ e $f(x)<0$ per $x>0$, altrimenti il grafico della funzione dovrebbe intersecare l'asse delle ascisse in altri punti.

Inoltre, da quanto appena osservato e dal fatto che non esistono altri massimi e minimi relativi, si può concludere che f è crescente negli intervalli $]-\infty; -2[$ e $]1; +\infty[$ e decrescente altrove.
Per quanto riguarda i flessi, si può solo dire che la funzione ha almeno tre flessi ma non si può stabilire il loro numero esatto. Infatti, il grafico di f ha la concavità rivolta verso il basso nel punto di massimo $x=-2$ mentre è rivolta verso l'alto per $x \to -\infty$. Quindi deve esserci almeno un flesso per $x<-2$. Inoltre, poiché nel punto di minimo $x=1$ la concavità è rivolta verso l'alto, esiste un altro flesso tra $x=-2$ e $x=1$. Analogamente si ha almeno un terzo flesso per $x>1$.
Dalle considerazioni compiute si deduce che il grafico di f ha il seguente andamento, nel caso in cui la f ammetta esattamente tre flessi (figura 9).



▲ **Figura 9.**

4 Per qualsiasi valore di a, la funzione f può essere prolungata anche nel punto $x=0$, assegnando un arbitrario valore a $f(0)$. Ad esempio:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} 2x & \text{per } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{per } x=0 \\ \dfrac{1+a}{\operatorname{sen} x} & \text{per } -\dfrac{\pi}{2}<x<0 \end{cases}$$

Diversamente, se si volesse prolungare imponendo la continuità della funzione, possiamo osservare che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{a}\operatorname{sen} 2x=0, \text{ per ogni } a\neq 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+a}{\operatorname{sen} x}=\begin{cases} 0 & \text{se } a=-1 \\ \infty & \text{se } a\neq -1 \end{cases}$$

Dunque solo per $a=-1$, i due limiti coincidono. Ne segue che la funzione per $a=-1$, prolungata definendo $f(0)=0$, risulta essere continua.

5 Sia a_1 il valore iniziale del titolo di borsa. Il valore dopo la perdita dell'x% è $a_2=a_1-\dfrac{x}{100}a_1$. Oggi vale, guadagnando l'y%, $a_3=a_2+\dfrac{y}{100}a_2=a_2\left(1+\dfrac{y}{100}\right)=a_1\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{y}{100}\right)$.

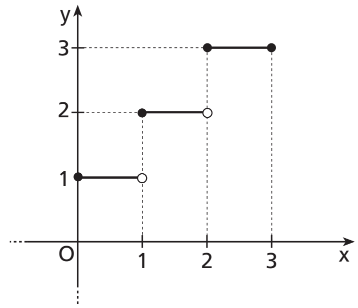
Quindi, essendo $a_3=a_1$, deve valere:

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)=1 \ \to\ (100-x)(100+y)=10\,000 \ \to\ y(100-x)=100x,$$

da cui $y=\dfrac{100x}{100-x}$.

Il grafico di tale funzione, supponendo $0\leq x<100$, è una parte di un ramo di iperbole omografica.

6 L'insieme delle funzioni integrabili è più ampio dell'insieme delle funzioni continue. Infatti una funzione che, in un dato intervallo, non è continua ma è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità, è integrabile. Basta infatti sommare gli integrali definiti in tutti gli intervalli in cui la funzione è continua. Ad esempio, sia f la funzione a gradini definita nell'intervallo [0; 3] il cui grafico è rappresentato in figura 10.



▲ **Figura 10.**

Calcoliamo l'integrale definito in [0; 3]:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 1 + 2 + 3 = 6.$$

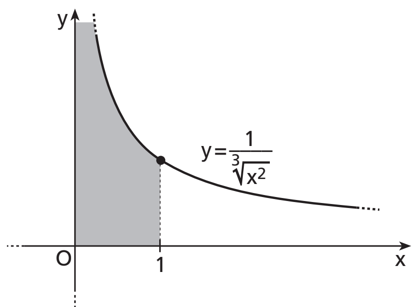
Il concetto di integrabilità può essere ampliato considerando anche particolari funzioni non limitate. Ad esempio, sia g la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

definita in [0;1] con $0 < \alpha < 1$. Allora vale:

$$\int_0^1 g(x)dx = \lim_{h \to 0^+} \int_h^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{h \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=h}^{x=1} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1-h^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Interpretando geometricamente quanto osservato, ad esempio per $a = \frac{2}{3}$, possiamo dire che la regione evidenziata in figura 11 è illimitata ma la sua area è finita.



▶ **Figura 11.**

7 Una primitiva di $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right)$, supponendo $x > 0$, è:

$$g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x+2)] = \frac{1}{2}\ln[x(x+2)] = \ln\sqrt{x^2+2x}.$$

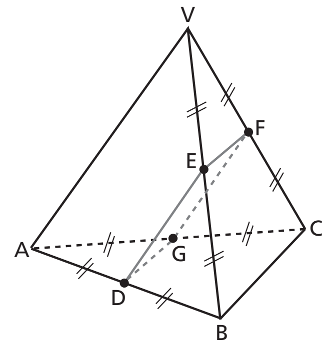
La risposta esatta è C.

8 La somma dei primi n numeri naturali dispari è $S_n = n^2$. Dimostriamolo per induzione.
Per $n = 1$, $S_1 = 1 = 1^2$,
per $n = 2$, $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$.
Supponiamo la tesi vera per n, cioè $S_n = n^2$, e dimostriamola per $n + 1$.
Il numero naturale dispari $(n+1)$-esimo è $2(n+1) - 1$, quindi vale:

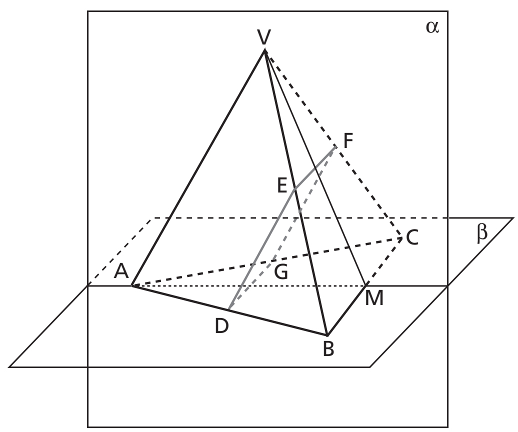
$$S_{n+1} = S_n + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Possiamo dunque concludere che la tesi è verificata. Ne segue che la successione $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$ è costante e vale $a_n = \frac{1}{2}$. La risposta esatta è A.

9 Consideriamo il tetraedro in figura 12.
Siano *D*, *E*, *F* e *G* i punti medi rispettivamente degli spigoli *AB*, *VB*, *VC* e *AC*. Si ha che i triangoli *EBD*, *VEF*, *FCG* e *ADG* sono simili rispettivamente ai triangoli *ABV*, *VBC*, *VAC* e *ABC*, poiché hanno un angolo in comune e i lati adiacenti in proporzione. Ne segue che $DE \cong EF \cong FG \cong DG$ in quanto congruenti alla metà dello spigolo del tetraedro. Possiamo allora concludere che *DEFG* è un rombo per i criteri per riconoscere i parallelogrammi.
Per dimostrare che tale rombo è un quadrato, consideriamo il punto medio *M* dello spigolo *BC* e il piano α passante per *A*, *V* ed *M* (figura 13). *ED* ed *FG* sono paralleli a tale piano, in quanto paralleli ad *AV*. Mentre *DG* ed *EF* sono perpendicolari ad α, in quanto paralleli alla retta per *BC* che è perpendicolare al piano α. Gli angoli del rombo sono quindi retti e perciò il rombo è un quadrato.



▲ **Figura 12.**



▶ **Figura 13.**

10 a), d) Consideriamo un sistema di riferimento ortogonale dello spazio (*Oxyz*) e prendiamo due qualsiasi rette *a* e *b* del piano *xy* tra loro parallele. Esse sono entrambe perpendicolari all'asse *z*. È quindi possibile che due rette siano parallele e che comunque non siano ortogonali. Le risposte alle domande a) e d) sono rispettivamente sì e no.

b), c) Gli assi *x* e *y* sono tra loro ortogonali ed entrambi ortogonali all'asse *z*. Ne segue che è possibile che due rette siano ortogonali e che non siano comunque parallele. Le risposte a b) e c) sono rispettivamente sì e no.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Esercizio 63 pag. V 245 • Esercizio 474 pag. V 75 • Esercizio 376 pag. W 56
Problema 2	• Problema 19 pag. π 144 • Problema 270 pag. V 204 • Esercizio 308 pag. V 210
Quesito 1	• Esercizio 16 pag. L 122 • Esercizio 19 pag. L 122 • Esercizio 21 pag. L 122
Quesito 2	• Quesito 1 pag. U 110
Quesito 3	• Quesito 1 pag. V 282 • Quesito 7 pag. V 282
Quesito 4	• Esercizio 698 pag. U 204 • Problema 12 pag. V 91 (punto a)
Quesito 5	• Quesito 4 pag. S 175 • Esercizio 19 pag. S 178
Quesito 6	• Test 1 pag. W 69
Quesito 7	• Esercizio 20 pag. W 29 • Esercizio 145 pag. W 39
Quesito 8	• Esercizio 146 pag. U 237 • Problema 9 pag. U 240
Quesito 9	• Esercizio 33 pag. π 73 • Esercizio 2 pag. π 96
Quesito 10	• Quesito 9 pag. W 165 • Quesito 4 pag. π 142