ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:
1) EC è perpendicolare a CB;
2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$;
2) le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2; 2)$.

d) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

QUESTIONARIO

1 Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

2 Sia *ABC* un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati *ABDE*, *BCFG* e *CAHL*. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli *AHE*, *BDG* e *CFL* sono equivalenti al triangolo *ABC*.

3 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

4 Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5 Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «*teorema di Nicomaco*» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

6 Il limite della funzione $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ per $x \to +\infty$ è:
A) e,
B) $\frac{1}{e}$,
C) $\sqrt{e}$,
D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$,
dove "e" è la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

7 Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione: $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\mathrm{sen}\,t}$.

8 Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ammette una e una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.

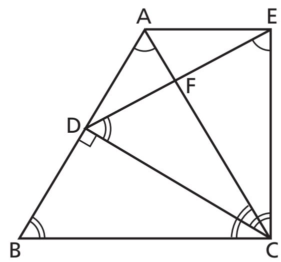
9 Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

10 Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il «47» sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a1. Considerato il triangolo acutangolo isoscele *ABC* (figura 1), con *CD* altezza condotta per *C*, si costruisce il triangolo isoscele *ECD* di base *CD*, simile al triangolo *ABC*. Pertanto i triangoli *ABC* ed *ECD* hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
Nel triangolo rettangolo *BCD* l'angolo $D\hat{B}C$ è complementare a $B\hat{C}D$. Poiché l'angolo $D\hat{C}E$ è congruente a $D\hat{B}C$ per costruzione, risulta che $D\hat{C}E$ è complementare a $B\hat{C}D$. Pertanto l'angolo $B\hat{C}E$ è retto perché somma di due angoli complementari ed *EC* è perpendicolare a *CB*.



▲ **Figura 1.**

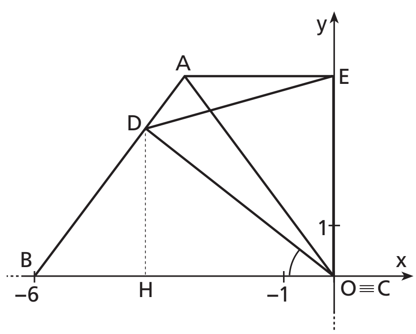
a2. Considerati i triangoli *EFC* e *AFD*, essi hanno: $A\hat{F}D \cong E\hat{F}C$ perché angoli opposti al vertice; $D\hat{A}F \cong F\hat{E}C$ per costruzione. I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare risulta: $AF : DF = EF : CF$. Ora, i triangoli *EFA* e *CFD* hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi $A\hat{F}E$ e $D\hat{F}C$ congruenti perché opposti al vertice. Quindi, per il secondo criterio di similitudine i triangoli *EFA* e *CFD* sono simili e, in particolare, $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti.

a3. I triangoli *EFA* e *CFD* sono simili per la dimostrazione precedente, quindi $F\hat{A}E$ è congruente a $F\hat{D}C$. Ma $F\hat{D}C \cong B\hat{C}A$ per costruzione, pertanto, per la proprietà transitiva $F\hat{A}E = B\hat{C}A$. Considerati i segmenti *EA* e *CB*, essi formano con la trasversale *AC* angoli alterni interni congruenti e quindi, per il teorema inverso delle rette parallele, i segmenti *EA* e *CB* sono paralleli.

a4. Si osservino gli angoli del quadrilatero *AECD*. Poiché *EA* è parallelo a *CB* e $B\hat{C}E$ è retto per dimostrazioni precedenti, l'angolo $A\hat{E}C$ è anch'esso retto per il teorema delle rette parallele. L'angolo $A\hat{D}C$ del quadrilatero, opposto a $A\hat{E}C$, è retto per costruzione, pertanto il quadrilatero *AECD* ha gli angoli opposti $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ supplementari. Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti, anche i restanti angoli interni e opposti $D\hat{A}E$ e $E\hat{C}D$ del quadrilatero sono supplementari. Per il teorema inverso dei quadrilateri inscritti, il quadrilatero *AECD* è quindi inscrivibile in una circonferenza.

b1. Si fissa un sistema cartesiano ortogonale centrato nel punto *C* e tale che il lato *BC* sia sull'asse negativo delle ascisse (figura 2). Le coordinate dei punti *B* e *C* sono quindi: $B(-6; 0)$ e $C(0; 0)$.
Il triangolo *BCD* è rettangolo per costruzione e sono note le misure del cateto $\overline{CD} = \frac{24}{5}$ e dell'ipotenusa $\overline{BC} = 6$. Quindi il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$ si determina applicando il teorema di trigonometria sui triangoli rettangoli:

$$\overline{CD} = \overline{BC} \cdot \cos(B\hat{C}D) \quad \rightarrow \quad \cos(B\hat{C}D) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$



▲ **Figura 2.**

Per l'identità fondamentale della goniometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e tenendo conto che l'angolo $B\hat{C}D$ è acuto, risulta:

$$\text{sen}\, B\hat{C}D = \sqrt{1-\cos^2 B\hat{C}D} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

b2. Primo metodo.

Si osservi la figura 2: i triangoli ABC e EDC sono simili per costruzione. Il loro rapporto di similitudine k può essere calcolato confrontando le misure dei lati proporzionali BC e CD:

$$k = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$

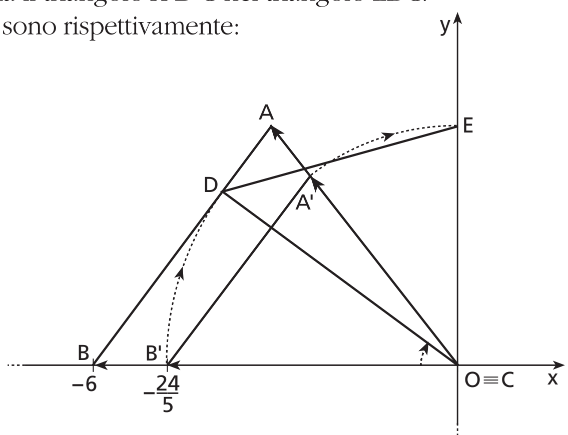
Le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC possono essere determinate tramite la composizione di due trasformazioni: una omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{4}{5}$ (figura 3), che trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C$, congruente al triangolo EDC; una rotazione oraria di centro O e angolo $B\hat{C}D$, che trasforma il triangolo $A'B'C$ nel triangolo EDC.

Le equazioni dell'omotetia e della rotazione stabilite sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x \\ y' = \frac{4}{5}y \end{cases},$$

$$\begin{cases} x'' = x'\cos(-B\hat{C}D) - y'\,\text{sen}(-B\hat{C}D) \\ y'' = x'\,\text{sen}(-B\hat{C}D) + y'\cos(-B\hat{C}D) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ y'' = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases};$$



▲ **Figura 3.**

eseguendo la loro composizione si ottengono le equazioni della similitudine cercata:

$$\begin{cases} x'' = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}y \\ y'' = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ y'' = -\frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y \end{cases}.$$

Si nota, come ci si aspettava, che la trasformazione è della forma: $\begin{cases} x'' = mx - ny \\ y'' = nx + my \end{cases}$, cioè una similitudine diretta di rapporto $k = \sqrt{m^2+n^2}$, dove $m = \frac{16}{25}$ e $n = \frac{12}{25}$, per cui

$$k = \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \text{ come era richiesto.}$$

Secondo metodo.

Le equazioni di una similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad \text{con} \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

con $\sqrt{a^2+b^2} = k$, essendo k il rapporto di similitudine.

Dobbiamo determinare a, b, c, c'. Consideriamo la trasformazione del segmento BC nel segmento DC. Essendo (vedi figura 2):

$$\overline{HC} = \overline{DC} \cos D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25}, \qquad \overline{DH} = \overline{DC} \operatorname{sen} D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{72}{25},$$

abbiamo la trasformazione:

$$B(-6; 0) \quad \to \quad D\left(-\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right),$$

$$C(0; 0) \quad \to \quad C(0; 0).$$

Sostituendo nelle equazioni della similitudine, otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = c' \\ -\dfrac{96}{25} = -6a + c \quad \to \quad a = \dfrac{16}{25} \\ \dfrac{72}{25} = -6b + c' \quad \to \quad b = -\dfrac{12}{25} \end{cases}$$

Le equazioni della similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{16}{25}x + \dfrac{12}{25}y \\ y' = -\dfrac{12}{25}x + \dfrac{16}{25}y \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

PROBLEMA 2

a) Le curve di equazione $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x. Pertanto, ponendo $f'(x) = 0$, si ottiene $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x = 0$, in cui ogni curva seca l'asse y, le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x.

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0, interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$, la derivata prima è $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$. Posto $f''(x) > 0$, risulta:

$$12x^2 + 6ax + 2b > 0 \quad \to \quad 6x^2 + 3ax + b > 0.$$

L'equazione associata, $6x^2 + 3ax + b = 0$, ammette soluzioni reali $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 24b}}{12}$, con $\Delta = 9a^2 - 24b \geq 0$.
Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$ se vale la seguente relazione tra a e b:

$$9a^2 - 24b < 0 \quad \to \quad 3a^2 - 8b < 0.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ.

Se $\Delta > 0$, cioè $3a^2 - 8b > 0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2 - 8b > 0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.
Se $\Delta = 0$, cioè $3a^2 = 8b$, la derivata seconda è positiva per $x \neq -\frac{a}{4}$ e nulla per $x = -\frac{a}{4}$. La derivata prima, $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$, diventa $f'(x) = x\left(4x^2 + 3ax + \frac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $x > 0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x = 0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in $\mathbb{R}$.
In conclusione, la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$ se a e b soddisfano la relazione: $3a^2 - 8b \leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x = 0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0; c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ si annulli per $x = 0$ cioè $f''(0) = 0$. Risulta quindi:

$$f''(0) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0; c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2; 2)$, si deduce che $c = 2$.
Infine, poiché la curva passa per il punto $(2; 2)$ deve valere $2 = f(2)$, cioè:

$$2 = 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \quad \rightarrow \quad 8a + 4b + c = -14.$$

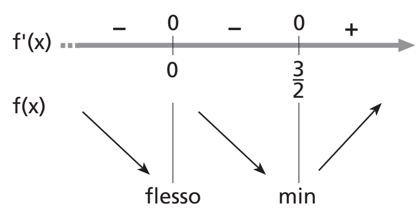
Si pongono a sistema le relazioni trovate:

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 2 \\ 8a + 4b + c = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

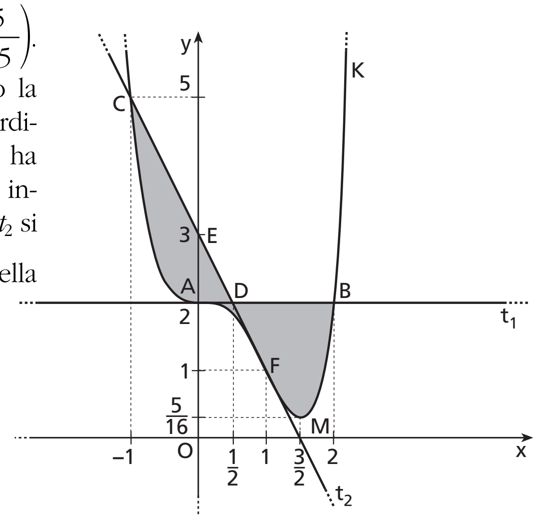
La curva ha equazione: $y = x^4 - 2x^3 + 2$.

d) Si studia la curva K di equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali e si ha: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Per le considerazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0; 2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione t_1: $y = 2$. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

▼ Figura 4.



La curva ha un minimo assoluto di coordinate $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{15}\right)$.
La derivata seconda vale $f''(x) = 12x^2 - 12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x = 1$, di coordinate $F(1; 1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione t_2: $y - 1 = f'(1)(x - 1)$ cioè $y = -2x + 3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1; 5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Nella figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



▶ Figura 5.

La regione finita di piano è formata dal triangolo ADE e da due figure mistilinee CAE e $AFMB$, di superficie rispettivamente S_{ADE}, S_{CAE} e S_{AFMB}. Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AE} \quad\to\quad S_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^{0}(-2x+3-x^4+2x^3-2)\,dx = \left[-x^2+x-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^{0} = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_{0}^{2}(2-x^4+2x^3-2)\,dx = \left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4\right]_{0}^{2} = \frac{8}{5}.$$

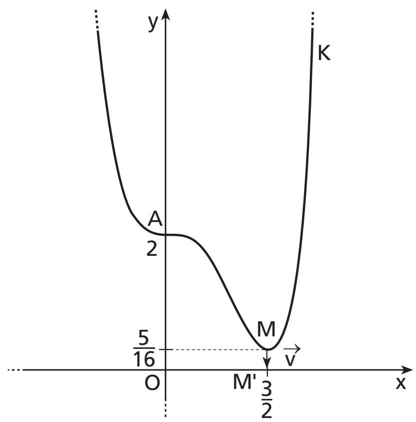
L'area S della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \quad\to\quad S = \frac{1}{4}+\frac{13}{10}+\frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

e) Tenendo conto che il flesso $A(0; 2)$ deve rimanere sull'asse y, il vettore di traslazione $\vec{v}(a; b)$ ha componente orizzontale nulla ovvero $a=0$ e la traslazione è verticale. Inoltre, se il minimo $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$ ha il suo trasformato sull'asse x, $M'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ (figura 6), la componente verticale b di $\vec{v}$ deve valere $-\frac{5}{16}$.

Pertanto il vettore di traslazione è $\vec{v}\left(0; -\frac{5}{16}\right)$ e le corrispondenti equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \dfrac{5}{16} \end{cases}.$$



▲ **Figura 6.**

QUESTIONARIO

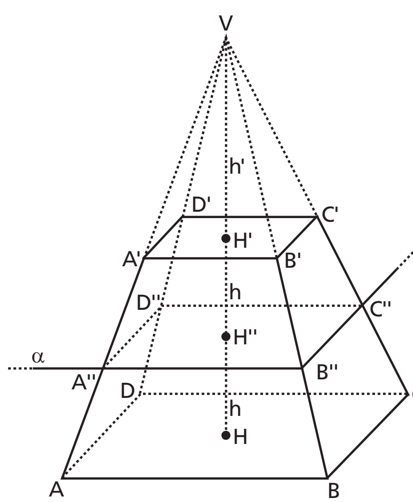
1 Nella figura 7 è rappresentato il tronco di piramide quadrangolare regolare la cui base maggiore $ABCD$ ha area S quadrupla della superficie S' della base minore $A'B'C'D'$. Il piano α è equidistante dalle basi del tronco per cui, indicata con $2h$ la misura dell'altezza HH', vale $\overline{HH''} = \overline{H''H'} = h$. Il piano intercetta sul tronco il quadrato $A''B''C''D''$ di area S''.

Prolungati gli spigoli laterali si trova il vertice V della corrispondente piramide di base $ABCD$. Indicata con h' la misura dell'altezza VH', poiché le aree delle superfici di base di due piramidi simili sono proporzionali ai quadrati delle misure delle rispettive altezze, vale la seguente proporzione:

$$S : (h'+2h)^2 = S' : h'^2.$$

Essendo $S = 4S'$ per ipotesi, la relazione sopra diventa:

$$4S' : (h'+2h)^2 = S' : h'^2 \quad\to\quad \frac{h'+2h}{h'} = 2 \quad\to\quad h' = 2h.$$



▲ **Figura 7.**

Utilizzando tale risultato e applicando lo stesso teorema riferito al piano α si trova:

$$S:(4h)^2 = S'':(3h)^2 \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16}S \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16}\cdot 4S' = \frac{9}{4}S'.$$

Indicati con V_1 e V_2 i volumi dei tronchi di piramide, rispettivamente inferiore e superiore, in cui risulta diviso il tronco di partenza, essi possono essere calcolati con la formula generale del volume del tronco di piramide. In tal caso il loro rapporto ha espressione:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}h(S + S'' + \sqrt{S\cdot S''})}{\frac{1}{3}h(S' + S'' + \sqrt{S'\cdot S''})}.$$

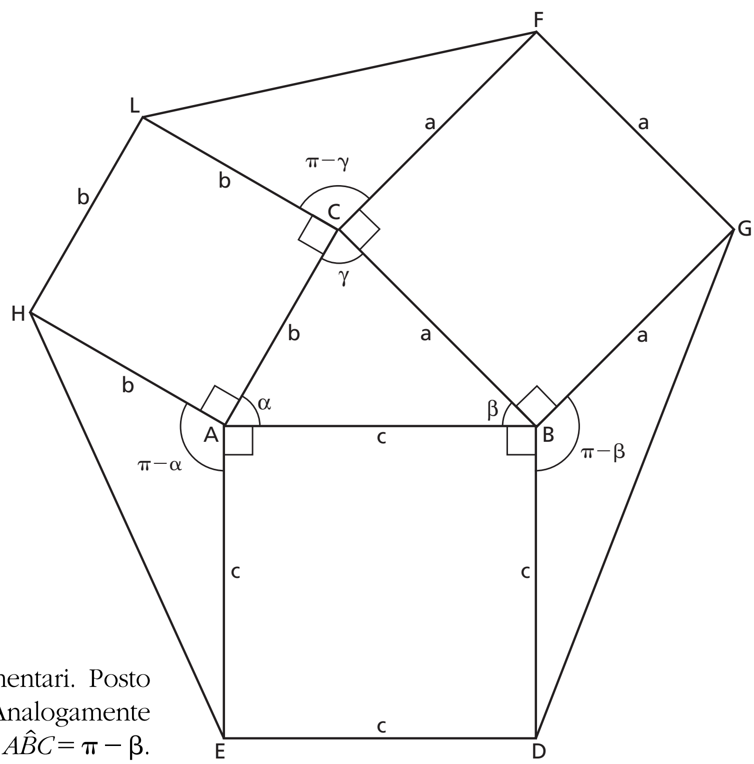
Per le relazioni trovate in precedenza si può scrivere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(4S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{4S'\cdot\frac{9}{4}S'}\right)}{\left(S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{S'\cdot\frac{9}{4}S'}\right)} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 3}{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{37}{19}.$$

Pertanto i dati sono sufficienti per calcolare tale rapporto.

2 Il triangolo ABC e la costruzione richiesta dal testo del quesito sono riportati nella figura 8.

▶ **Figura 8.**



Gli angoli $L\hat{C}F$ e $A\hat{C}B$ sono supplementari. Posto $A\hat{C}B = \gamma$, risulta quindi $L\hat{C}F = \pi - \gamma$. Analogamente $H\hat{A}E = \pi - C\hat{A}E = \pi - \alpha$ e $D\hat{B}G = \pi - A\hat{B}C = \pi - \beta$. Calcoliamo le aree dei triangoli mediante la relativa formula trigonometrica:

$$S_{LCF} = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\gamma;$$

$$S_{HAE} = \frac{1}{2}\,bc\,\mathrm{sen}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\,bc\,\mathrm{sen}\,\alpha;$$

$$S_{BDG} = \frac{1}{2}\,ac\,\mathrm{sen}(\pi - \beta) = \frac{1}{2}\,ac\,\mathrm{sen}\,\beta;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,bc\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\,ac\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\,ab\,\mathrm{sen}\,\gamma.$$

Quindi, confrontando, otteniamo:

$$S_{ABC} = S_{LCF} = S_{HAE} = S_{BDG}.$$

3 Si considera il risultato di Claudia: $2 + \log_2 81$. Applicando la definizione di logaritmo e la proprietà del logaritmo di un prodotto si può scrivere:

$$\begin{aligned} 2 + \log_2 81 &= \log_2 4 + \log_2(3 \cdot 27) = \\ &= \log_2 4 + \log_2 3 + \log_2 27 = \log_2(4 \cdot 3) + \log_2 27 = \log_2 12 + \log_2 27. \end{aligned}$$

Pertanto il risultato di Claudia, essendo equivalente a quello di Luca, è esatto.

4 Una funzione sinusoidale ha espressione $y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi)$, con A e $\omega \neq 0$, dove $|A|$ è detta ampiezza, ω pulsazione e φ fase iniziale. Utilizzando le formule goniometriche del seno della somma di due angoli, essa può essere scritta come:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) \quad \rightarrow \quad y = A\cos\varphi \cdot \mathrm{sen}\,\omega x + A\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \cos\omega x.$$

Si consideri ora la funzione $y = a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$. Si compiano le seguenti sostituzioni, che derivano dalle formule di duplicazione:

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \mathrm{sen}\,x\cos x = \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2}.$$

La funzione diventa:

$$y = a\,\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{b}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + c\,\frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) \cdot \cos 2x + \frac{a}{2} + \frac{c}{2}.$$

Se $a = c \neq 0$ e $b = 0$ la funzione è:

$$y = \frac{a + c}{2} = a,$$

quindi il suo grafico è una retta parallela all'asse x e non una sinusoide.
Se $a \neq c$, confrontiamo l'espressione della funzione ottenuta con l'espressione della funzione sinusoidale. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{b}{2} = A\cos\varphi \\[2ex] \dfrac{c}{2} - \dfrac{a}{2} = A\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -c \\[2ex] A\cos\varphi = \dfrac{b}{2}. \\[2ex] A\,\mathrm{sen}\,\varphi = c \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri della seconda e della terza equazione:

$$A^2 \cos^2 \varphi = \frac{b^2}{4}$$

$$A^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = c^2.$$

Sommiamo membro a membro e raccogliamo A^2:

$$A^2(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = c^2 + \frac{b^2}{4} \quad \rightarrow \quad A = \pm \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}\ .$$

Consideriamo ancora la seconda e terza equazione e dividiamo membro a membro:

$$\frac{\cancel{A} \operatorname{sen} \varphi}{\cancel{A} \cos \varphi} = \frac{2c}{b} \qquad \text{con } b \neq 0.$$

Pertanto la funzione di partenza, $y = a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen} x \cos x + c\cos^2 x$, è sinusoidale se $a = -c$, con a, $c \neq 0$, $b \neq 0$ e ha forma $y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$, con ampiezza $|A| = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}$, pulsazione $\omega = 2$ e fase iniziale $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2c}{b}$.

Se $a = -c \neq 0$, $b = 0$, la funzione si riduce alla forma: $y = c\cos 2x \quad \rightarrow \quad y = c\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, con $|A| = |c|$, $\omega = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ quindi essa è ancora sinusoidale.

Si può allora concludere che per a e c diversi da zero e $a \neq -c$, la funzione non è sinusoidale. Ugualmente,

- per $b = c = 0$ l'equazione si riduce a $y = \operatorname{sen}^2 x$ non sinusoidale;
- per $a = b = 0$ l'equazione si riduce a $y = \cos^2 x$ non sinusoidale.

5 Il principio d'induzione matematica si può formulare nel seguente modo. Data una proposizione $P(n)$ il cui enunciato dipenda da n, con $n \geq 1$ naturale, se:

- P è vera per $n = 1$;
- supposta P vera per n, è vera anche per $n + 1$,

allora essa è vera per qualsiasi $n \geq 1$.

Si consideri ora la relazione $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$. Se $n = 1$, i due membri diventano rispettivamente $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1$ e $\left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = 1$. Essi sono uguali e si deduce che la proposizione è vera per $n = 1$. Supposta vera la relazione $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$, bisogna dimostrare che vale $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$.

Si consideri la somma $\sum_{i=1}^{n+1} i^3$. Essa può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + (n+1)^3.$$

Poiché $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per il teorema sulla somma di n termini di una progressione aritmetica, risulta $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ e l'espressione sopra diventa:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Applicando nuovamente il teorema poc'anzi ricordato, vale $\left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$, pertanto risulta:

$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$, come si voleva dimostrare.

In conclusione, la proposizione $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ è vera per il principio di induzione.

6 Considerato il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$, si tratta di una forma indeterminata 1^∞. Posto $y=2x$, ovvero $x=\dfrac{y}{2}$, e, poiché per $x\to+\infty$, si ha anche $y\to+\infty$, il limite diventa:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{2}} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Applicando il limite notevole $\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$, ne consegue che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}$.
La risposta esatta è pertanto C.

7 Si considera inizialmente $x>0$ per cui si può scrivere $-x<0 \wedge 2x>0$. La funzione integranda $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ non è continua nei punti $x=k\pi$, con k intero. Si prenda un punto x_0, con $-x<x_0<2x$, e si applichino le proprietà dell'additività dell'integrale e dello scambio degli estremi d'integrazione:

$$\int_{-x}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt = \int_{-x}^{x_0}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt + \int_{x_0}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt = -\int_{x_0}^{-x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt + \int_{x_0}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt.$$

Considerata la funzione integrale $F(x)=\int_{x_0}^{x}\dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt$, con $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ continua nell'intervallo di integrazione $[x_0; x]$, risulta:

$$\int_{-x}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt = F(2x)-F(-x).$$

Derivando membro a membro rispetto alla x e applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$D\left[\int_{-x}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt\right] = D[F(2x)-F(-x)] = 2\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}.$$

Allo stesso modo si dimostra che per $x<0$, la funzione derivata ha la stessa espressione:

$$D\left[\int_{-x}^{2x}\frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt\right] = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}.$$

8 Posto $f(x)=x^3+x+1$, la funzione ha campo di esistenza reale. I limiti agli estremi valgono: $\lim_{x\to-\infty} f=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$, ed essendo la funzione continua, essa assume sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste allora almeno uno zero. Se, per assurdo, si assume che ci sono due zeri, deve valere $f(x_1)=f(x_2)=0$. Allora per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c\in\,]x_1; x_2[$ tale che $f'(c)=0$.
La derivata prima è $f'(x)=3x^2+1$ ed è sempre positiva. Si è così raggiunto un assurdo, quindi la funzione ha un solo zero. Pertanto, l'equazione $x^3+x+1=0$ ha una sola radice reale.

Poniamo $f(x) = 0$, cioè:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

$$x^3 = -x - 1$$

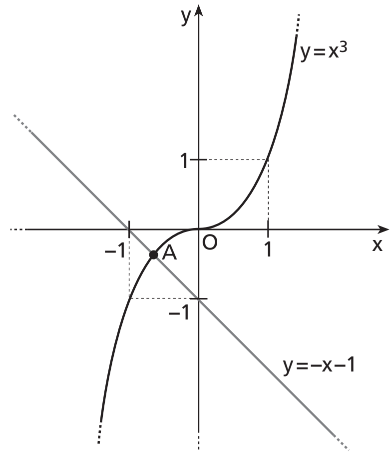
Se chiamiamo y ognuno dei due membri, otteniamo:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x - 1 \end{cases}.$$

Rappresentiamo le due funzioni e troviamo graficamente il punto A comune (figura 9).
Il punto A ha ascissa x_A compresa fra -1 e 0.
Si determina il suo valore approssimato attraverso il metodo delle secanti. Poiché $f(-1) = -1$ e $f(-0,5) = 0,375$, si localizza la radice nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-1; -0,5]$. In tale intervallo la derivata seconda $f'' = 6x$ ha segno negativo e, poiché $f(a_0)\, f''(x) = -f''(x) > 0$, si utilizza la formula di ricorrenza:

$$x_0 = b_0,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n).$$



▲ **Figura 9.**

Nel caso specifico risulta:

$$x_0 = -0,5,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-1 - x_n}{-1 - x_n^3 - x_n - 1} \cdot (x_n^3 + x_n + 1) = \frac{-x_n^3 - 1}{x_n^3 + x_n + 2}.$$

Si esegue l'iterazione fino a $n = 6$ mettendo i risultati nella seguente tabella.

n	x_n
0	−0,5
1	−0,636364
2	−0,671196
3	−0,679662
4	−0,681691
5	−0,682176
6	−0,682292

Il valore approssimato della radice dell'equazione è $-0,682292$.

9 Si suppone di stabilire una prima distinzione tra le palline attraverso il materiale di costruzione, cioè il vetro e la plastica. Poiché quelle di vetro sono 115, di cui 45 bianche per ipotesi, le restanti, $115 - 45 = 70$, sono nere. Inoltre, le palline di plastica sono formate da 80 nere, per ipotesi, e da un numero imprecisato di bianche. Tale numero si ottiene sottraendo al numero totale di palline bianche, il numero di quelle bianche di vetro, ovvero $135 - 45 = 90$. Risulta il seguente quadro:

Totale palline di vetro = 115 → 45 bianche
Totale palline di vetro = 115 → 70 nere

$$\text{Totale palline di plastica} \begin{cases} \to \text{90 bianche} \\ \to \text{80 nere} \end{cases}$$

Dallo schema si ricava che le palline di plastica sono in totale $90 + 80 = 170$, mentre l'urna contiene $115 + 170 = 285$ palline.
Le palline di vetro nere sono 70, per cui la probabilità che, estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia di vetro nera è:

$$P(\text{vetro nera}) = \frac{70}{285} = \frac{14}{57}.$$

10 Primo metodo.
Nel gioco del lotto, ogni volta per ogni ruota, vengono estratti senza reimmissione cinque numeri da un'urna contenenti i numeri dall'uno al novanta. Considerati gli eventi:

E = «non esce il "47" nella ruota di Napoli»,
$\overline{E}$ = «esce il "47" nella ruota di Napoli»,

le loro probabilità valgono:

$$P(E) = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{85}{86} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18} \text{ e}$$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}.$$

Lo scopo è di calcolare la probabilità che il numero «47» non esca per 20 estrazioni ma esca alla 21-esima, sapendo che esso non è uscito per le prime 10 estrazioni. Si tratta della probabilità condizionata $P(E_1 | E_2)$, dove:

E_1 = «il "47" non esce per 20 estrazioni ed esce alla 21-esima»,
E_2 = «il "47" non esce per le prime 10 estrazioni».

Risulta allora:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}.$$

Poiché ogni estrazione della ruota è indipendente l'una dall'altra, gli eventi si riconducono a un problema di prove ripetute. Perciò vale:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) = \left(\frac{17}{18}\right)^{20} \cdot \frac{1}{18},$$

$$P(E_2) = \left(\frac{17}{18}\right)^{10},$$

e quindi:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{\left(\frac{17}{18}\right)^{20} \cdot \frac{1}{18}}{\left(\frac{17}{18}\right)^{10}} = \frac{17^{10}}{18^{11}} \simeq 0{,}0314.$$

Secondo metodo. Si tratta di eventi indipendenti. Per il teorema del prodotto logico di eventi si ha:

$$P(E) = [P(\text{«non esce il "47"»})]^{10} \cdot P(\text{«esce il "47"»}).$$

Considerato che tutte le possibili cinquine sono le combinazioni di 90 numeri a 5 per volta, tutte le cinquine che non contengono il 47 sono le combinazioni di 89 numeri a 5 per volta, tutte le cinquine che contengono il 47 sono le combinazioni di 89 numeri a 4 per volta, otteniamo:

$$P(E) = \left[\frac{C_{89,5}}{C_{90,5}}\right]^{10} \cdot \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} =$$

$$= \left[\frac{\cancel{89}\cdot\cancel{88}\cdot\cancel{87}\cdot\cancel{86}\cdot 85}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} \cdot \frac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{90\cdot\cancel{89}\cdot\cancel{88}\cdot\cancel{87}\cdot\cancel{86}}\right]^{10} \cdot \frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \cdot \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} =$$

$$= \left[\frac{85}{90}\right]^{10} \cdot \frac{5}{90} = \left[\frac{17}{18}\right]^{10} \cdot \frac{1}{18} = \frac{17^{10}}{18^{11}} \simeq 0{,}0314.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 2 pag. W 164 (punto a) • Esercizio 46 pag. Q 117 • Esercizio 319 pag. Q 150 • Esercizio 448 pag. J_1 101 (prima e seconda domanda)
Problema 2	• Esercizio 233 pag. V 196 • Problema 9 pag. V 216 (punto c) • Problema 13 pag. W 138 • Problema 2 pag. W 168 (punti a, b, c, d) • Esercizio 52 pag. J_1 54
Quesito 1	• Quesito 6 pag. π 96
Quesito 3	• Esercizio 294 pag. N 59 • Quesito 2 pag. W 166
Quesito 4	• Problema 20 pag. Q 91 (punti a, b)
Quesito 5	• Esercizio 214 pag. S 159 • Esercizio 215 pag. S 159
Quesito 6	• Test 320 pag. U 177 • Test 12 pag. U 206
Quesito 7	• Esercizio 118 pag. W 115 • Quesito 8 pag. W 136
Quesito 8	• Esercizio 23 pag. ι 24
Quesito 9	• Esercizio 13 pag. α 74 • Quesito 9 pag. W 177
Quesito 10	• Quesito 5 pag. α 94 • Quesito 6 pag. α 98