Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan\gamma = 3$?
- Posto $k = 1$. sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r e il grafico della funzione f, siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x. Come deve essere scelto il valore di t, in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R, espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

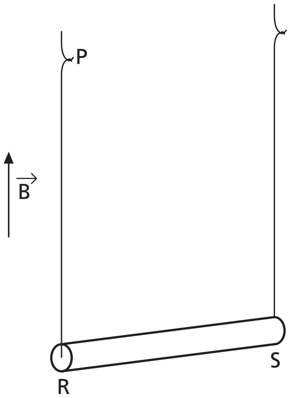
- Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \dfrac{k\,R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

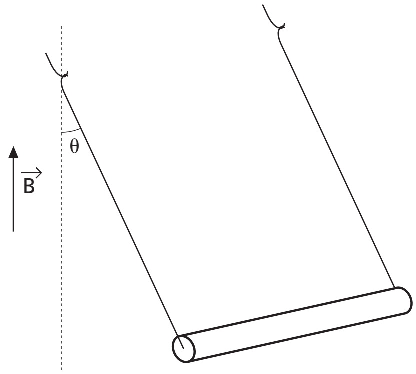
  dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.
- Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

PROBLEMA 2

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l, misurata in metri (m), di massa m, misurata in chilogrammi (kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e costante, perpendicolare al filo (**fig. 1**) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interrruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i, misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (**fig. 2**).



■ **Figura 1**



■ **Figura 2**

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto *RS*. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo *RS*. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza l del filo *RS*, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità.
- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.
- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

QUESTIONARIO

1 Determinare il valore di questo limite:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

2 Data la funzione $f(x) = x \sin x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx)\,dx$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k.

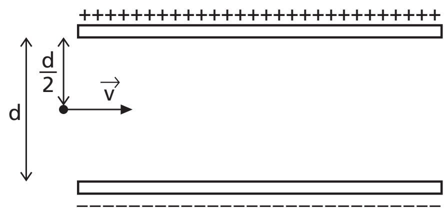
3 Dato un triangolo *ABC*, sia *M* il punto medio del lato *BC*. Dimostrare che, se la lunghezza di *AM* è la metà di *BC*, allora *ABC* è un triangolo rettangolo.

4 Dopo aver verificato che il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano π: $x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1; 0; 5)$ e tangente in T al piano π.

5 Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6 Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4{,}0$ cm, distanti $d = 3{,}0$ cm, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15$ V. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



■ **Figura 3**

7 Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.

8 Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0{,}20$ T, con velocità di modulo $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, che forma un angolo di 10° con la direzione di $\vec{B}$. Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

Costanti fisiche		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	me	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa particella alfa	m_α	$6{,}645 \cdot 10^{-27}$ kg
costante dielettrica del vuoto	ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

PROBLEMA 1

- La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

definita su $[0; +\infty[$ con $k > 0$, è sicuramente continua e infinitamente derivabile nel suo dominio per $x \neq 1$ perché le due funzioni $y = kx$ e $y = \dfrac{k}{x^2}$ che la definiscono nei due intervalli sono continue e infinitamente derivabili nei rispettivi domini naturali $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \{0\}$.

Verifichiamo ora la continuità in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} (kx) = \lim_{x \to 1^+} \frac{k}{x^2} = k = f(1),$$

per cui $f(x)$ è continua anche in $x = 1$ per ogni valore di k.

Studiamo ora la derivabilità. La derivata prima vale:

$$f'(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{2k}{x^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

La funzione è derivabile nel suo dominio per $x \neq 1$. Verifichiamo la derivabilità in $x = 1$.
Poiché risulta:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} k = k \text{ e } f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{2k}{x^3}\right) = -2k,$$

e quindi $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ per $k > 0$, la funzione non è mai derivabile in $x = 1$.
Elenchiamo alcune caratteristiche della funzione $f(x)$ utili per disegnare il suo grafico.
- $f(x)$ esiste ed è continua su $[0; +\infty[$;
- $f(x)$ interseca gli assi nell'origine $O(0; 0)$;
- $f(x)$ è sempre positiva per $x > 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x^2} = 0^+$, per cui l'asse x è un asintoto orizzontale destro;
- la derivata prima (già calcolata) non si annulla mai ed è positiva per $0 \leq x < 1$, intervallo in cui la funzione è crescente, ed è negativa per $x > 1$, dove la funzione è decrescente;
- $f(x)$ presenta dunque un punto di massimo assoluto nel suo punto di non derivabilità $M(1; k)$.

Calcoliamo poi la derivata seconda per studiare la concavità della funzione.

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{6k}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

La derivata seconda è dunque nulla per $0 \leq x < 1$, dove la funzione $f(x)$ è lineare, e positiva per $x > 1$, dove la funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto.
Si ricava il grafico della funzione $f(x)$.

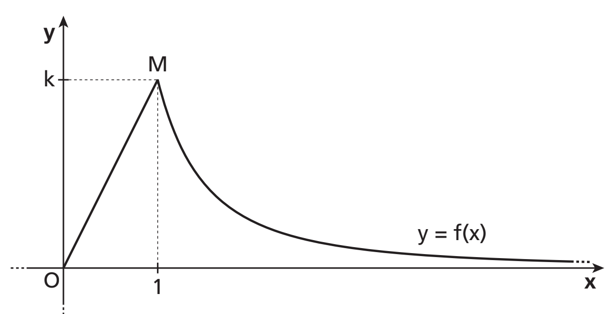


Figura 4

Indicati con α e β gli angoli che le due rette tangenti, destra e sinistra, nel punto M formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan\alpha = -2k$ e $\tan\beta = k$.
Poiché l'angolo γ è l'angolo acuto formato dalle due semirette tangenti in M, si ha:

$$\tan\gamma = \left|\tan(\alpha-\beta)\right| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\right| = \left|\frac{-2k-k}{1-2k^2}\right| = \left|\frac{3k}{2k^2-1}\right|.$$

Imponendo $\tan\gamma = 3$, e ricordando che un'equazione del tipo $|A(x)| = c$ si sdoppia nelle due equazioni $A(x) = c \vee A(x) = -c$, troviamo:

$$\left|\frac{3k}{2k^2-1}\right| = 3 \to 2k^2-k-1=0 \vee 2k^2+k-1=0 \to k=1 \vee k=-\frac{1}{2} \vee k=\frac{1}{2} \vee k=-1.$$

Con la condizione $k > 0$, solo i valori $k = \frac{1}{2} \vee k = 1$ sono accettabili.

- Posto $k = 1$, si ottiene la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

di cui disegniamo il grafico.

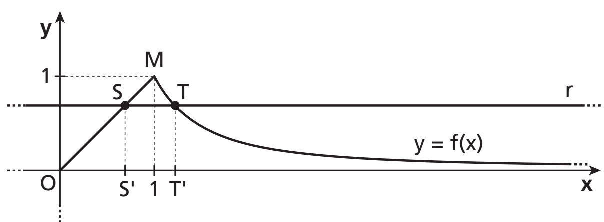


Figura 5

Il grafico di $f(x)$ interseca la retta r di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$, nei punti S e T di coordinate:

$$\begin{cases} y = x \\ y = t \end{cases} \to S(t; t);$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = t \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y = t \end{cases} \to T\left(\frac{1}{\sqrt{t}}; t\right) \text{ essendo accettabile solo il punto con } x > 0.$$

Osserviamo che, essendo $0 < t < 1$, l'ascissa di S è compresa fra 0 e 1 mentre l'ascissa di T è maggiore di 1.
Le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x hanno coordinate: $S'(t; 0)$ e $T'\left(\frac{1}{\sqrt{t}}; 0\right)$.
Il rettangolo $SS'T'T$ ha l'altezza $S'S = t$ e la base $S'T' = \frac{1}{\sqrt{t}} - t$, per cui la sua area vale:

$$A(t) = t\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t\right) = \sqrt{t} - t^2.$$

Per determinare il valore massimo, calcoliamo la sua derivata prima:

$$A'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = \frac{1-4t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}.$$

Studiamo il suo segno notando che il denominatore, per $0 < t < 1$, è sempre positivo mentre per il numeratore si ha:

$$1-4t\sqrt{t} > 0 \to t\sqrt{t} < \frac{1}{4} \to t^3 < \frac{1}{16} \to t < \frac{\sqrt[3]{4}}{4}.$$

Riportiamo il segno nel seguente schema.

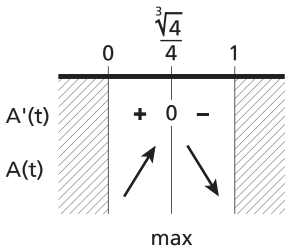


Figura 6

L'area massima del rettangolo si ottiene quindi per $t = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

- Detta $Q > 0$ la carica complessiva della distribuzione sferica di raggio R, la densità di carica uniforme vale $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Uilizzando il teorema di Gauss per il campo elettrico, consideriamo una sfera S concentrica a quella della distribuzione di carica e di raggio x con $0 \le x \le R$.
Il flusso del campo elettrico $\Phi(\vec{E})$ attraverso la sfera S vale:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{\varepsilon_0},$$

dove ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto.
Dalla definizione di flusso del campo elettrico si ha:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos 0° = E \cdot 4\pi x^2,$$

dove A rappresenta l'area della superficie sferica di raggio x.
Uguagliando le due espressioni si ottiene che:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}x, \text{ con } 0 \le x \le R.$$

Se invece consideriamo una sfera S concentrica a quella della distribuzione di carica ma di raggio x con $x > R$, il flusso del campo elettrico attraverso S per il teorema di Gauss vale:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}.$$

Dalla definizione di flusso del campo elettrico si ha sempre:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos 0° = E \cdot 4\pi x^2.$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{x^2}, \text{ con } x > R.$$

Possiamo allora scrivere la funzione $E(x)$ nella forma:

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \le x \le R \\ k\frac{R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases},$$

con $k = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$. L'unità di misura della costante k è:

$$\frac{\text{C}}{\text{m}^3} : \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = \frac{\text{N}}{\text{Cm}} = \frac{\text{kg}}{\text{C} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}.$$

Le dimensioni fisiche della costante k sono perciò: $[k] = \frac{[\text{massa}]}{[\text{corrente}] \cdot [\text{tempo}]^3}$.

- Per determinare il lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica positiva q dal centro O della sfera a un punto A posto a distanza $2R$ dal centro della sfera stessa, occorre calcolare il potenziale elettrico nel punto iniziale e finale.
  Sulla superficie della sfera di raggio R il potenziale vale:

  $$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} = kR^2.$$

  Il campo elettrico all'interno della sfera uniformemente carica è radiale e vale:

  $$E(x) = kx, \text{ con } 0 \leq x \leq R.$$

  Poiché $E(x) = -\frac{dV}{dx}$, cioè $dV = -E(x)dx$, si ha:

  $$\int_0^R dV = -k\int_0^R xdx \rightarrow V(R) - V(0) = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^R \rightarrow V(R) - V(0) = -\frac{k}{2}R^2 \rightarrow$$
  $$V(0) = V(R) + \frac{k}{2}R^2 = \frac{3}{2}kR^2.$$

  Alla distanza $2R$ dal centro della sfera, nel punto A, si ha:

  $$V(2R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2R} = \frac{k}{2}R^2.$$

  Il lavoro per spostare la carica q dal centro alla distanza $2R$ vale:

  $$L_{O\rightarrow A} = -q\Delta V = q[V(0) - V(2R)] = q\left(\frac{3}{2}kR^2 - \frac{k}{2}R^2\right) = qkR^2.$$

  A distanza infinita dal centro O il potenziale tende a zero, cioè si può porre $V(+\infty) = 0$; il lavoro per portare la carica q dal centro della sfera a distanza infinita da essa vale pertanto:

  $$L_{O\rightarrow +\infty} = -q\Delta V = q[V(0) - V(+\infty)] = q\left(\frac{3}{2}kR^2 - 0\right) = \frac{3}{2}qkR^2.$$

PROBLEMA 2

- Su di un filo di lunghezza l percorso da una corrente d'intensità i e immerso in un campo magnetico $\vec{B}$, agisce la forza magnetica $\vec{F} = i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$, dove $\vec{l}$ è un vettore che ha modulo pari alla lunghezza del filo l, direzione coincidente con quella del filo e verso della corrente i.
  Nella situazione proposta il vettore campo magnetico è perpendicolare al filo, perciò l'intensità di tale forza vale:

  $$F = ilB \sin 90° = ilB.$$

  La direzione della forza F è perpendicolare sia al filo RS sia al campo magnetico.
  Il verso della forza dipende, per la «regola della mano destra», dal verso della corrente che scorre nel filo.
  Nella figura seguente sono rappresentate le due possibili situazioni.

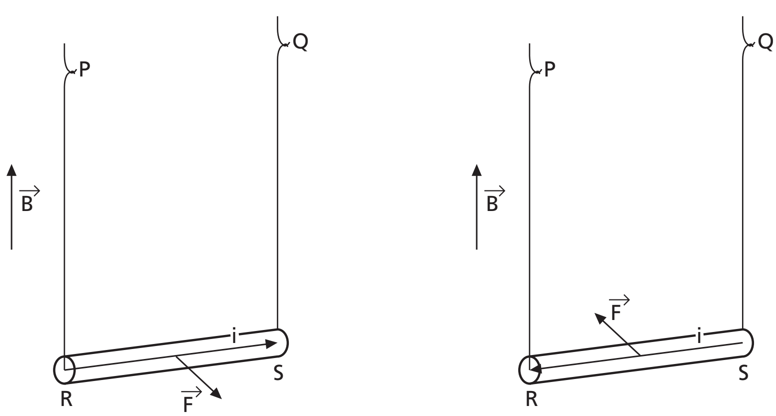


Figura 7

Per quanto riguarda la posizione di equilibrio del filo, oltre ad essere legata al verso della corrente, come detto in precedenza, dipende anche dall'intensità della corrente.
In particolare maggiore è l'intensità della corrente, maggiore è l'intensità della forza magnetica e quindi è maggiore anche l'ampiezza θ dell'angolo che si viene a formare all'equilibrio con la direzione verticale.
Nella figura sottostante sono illlustrate due situazioni: se $i_1 > i_2$ allora all'equilibrio si ha $\theta_1 > \theta_2$.

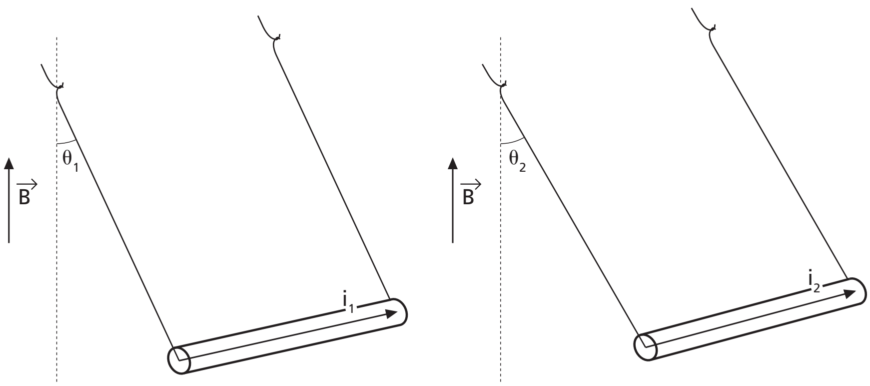


Figura 8

- Sul filo RS agiscono tre forze che si equilibrano: la forza magnetica $\vec{F}_M$, la forza peso $\vec{F}_P$, e la reazione vincolare $\vec{R_V}$.
  Nella figura a fianco è rappresentata la situazione descritta, vista di lato.
  Per determinare l'ampiezza dell'angolo θ, all'equilibrio deve risultare:

$$\begin{cases} R_V \sin\theta = F_M \\ R_V \cos\theta = F_P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_V \sin\theta = ilB \\ R_V \cos\theta = mg \end{cases}$$

  da cui, dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\tan\theta = \frac{ilB}{mg} \rightarrow \theta(i) = \arctan\left(\frac{lB}{mg} \cdot i\right).$$

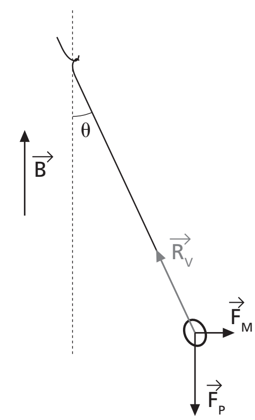


Figura 9

- La funzione $\theta(x) = y = \arctan(kx)$ ha come dominio $D =]-\infty; +\infty[$ e come immagine $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
  Ricaviamo l'equazione della sua funzione inversa:

$$y = \arctan(kx) \rightarrow \tan y = kx \rightarrow x = \frac{1}{k}\tan y,$$

  da cui, scambiando le variabili:

$$y = \frac{1}{k}\tan x \rightarrow \theta^{-1}(x) = y = \frac{1}{k}\tan x,$$

  che ha come dominio $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e come insieme immagine $I =]-\infty; +\infty[$.
  Entrambi i grafici delle funzioni $y = \theta(x)$ e $y = \theta^{-1}(x)$ passano per l'origine $O(0; 0)$; essi risultano tangenti in O se le derivate delle due funzioni sono uguali per $x = 0$. Calcoliamo le due derivate:

$$D[\theta(x)] = \frac{1}{1+(kx^2)} \cdot k = \frac{k}{1+k^2x^2} \rightarrow D[\theta(0)] = k;$$

$$D[\theta^{-1}(x)] = \frac{1}{k\cos^2 x} \rightarrow D[\theta^{-1}(0)] = \frac{1}{k}.$$

  Deve risultare:

$$k = \frac{1}{k} \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \pm 1.$$

  Per la condizione $k > 0$, solo $k = 1$ è accettabile.

Detti α e β gli angoli che le due rette tangenti nell'origine ai grafici delle due funzioni formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan\alpha = k$ e $\tan\beta = \frac{1}{k}$ e quindi:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{k-\frac{1}{k}}{1+k\cdot\frac{1}{k}} = \frac{k^2-1}{2k}.$$

Per formare un angolo di 30°, essendo $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deve risultare $\left|\frac{k^2-1}{2k}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, da cui:

$$\frac{k^2-1}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3k^2 - 2\sqrt{3}\,k - 3 = 0 \rightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{k^2-1}{2k} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3k^2 + 2\sqrt{3}\,k - 3 = 0 \rightarrow k = -\sqrt{3} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per la condizione $k > 0$, solo $k = \sqrt{3}$ e $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono accettabili.

- Per determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $\theta(x) = \arctan x$ il cui grafico passi per l'origine $O(0; 0)$ occorre innanzitutto calcolare l'integrale indefinito utilizzando il metodo d'integrazione per parti:

$$\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + c.$$

Imponendo il passaggio per O si ottiene $c = 0$, pertanto:

$$F(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}.$$

Il grafico di $\theta(x) = \arctan x$ è il seguente.

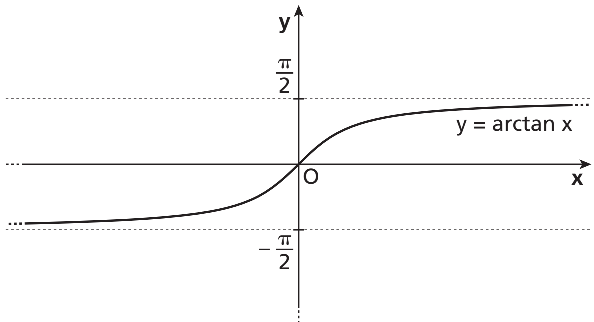


Figura 10

La funzione $\theta(x)$ ha dominio $D =]-\infty; +\infty[$, è dispari, passa per l'origine, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, presenta due asintoti orizzontali di equazioni $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.

Per dedurre dal grafico di $\theta(x)$ il grafico della sua primitiva $y = F(x)$, occorre ricordare che:

$F(0) = 0$;

$F(x)$ è crescente per $x > 0$, dove $\theta(x)$ è positiva, ed $F(x)$ è decrescente per $x < 0$, dove $\theta(x)$, è negativa;
nell'origine O la funzione $F(x)$ presenta un punto di minimo assoluto;
$F(x)$ è una funzione pari, mai negativa e risulta $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = +\infty$.

Pertanto il grafico qualitativo di $y = F(x)$ è il seguente.

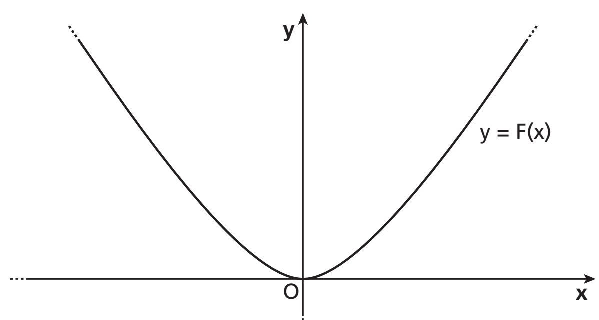


Figura 11

QUESTIONARIO

1 Il limite:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}.
Ricordando che se $A>0$ vale l'identità $A=e^{\ln A}$, e considerato $A=(1-\sin x)$, il limite si può riscrivere nella forma:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[e^{\ln(1-\sin x)}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo portato il limite all'esponente grazie alla continuità della funzione esponenziale.
Per calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{x}$, che è nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, applichiamo il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{D\ln(1-\sin x)}{Dx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{1}=-1.$$

Quindi il limite proposto vale:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

2 Data la funzione $f(x)=x\sin x$, risulta:

$$f(kx)=kx\sin(kx).$$

Per determinare il minimo valore positivo di x_0 tale che:

$$f(kx_0)=0\ \to\ kx_0\sin(kx_0)=0,$$

occorre notare che se $f(kx_0)=0$, allora x_0 deve essere la minore soluzione positiva di $\sin(kx_0)=0$, da cui:

$$kx_0=\pi\ \to\ x_0=\frac{\pi}{k}.$$

Per il calcolo dell'integrale indefinito $\int k\, f(kx)dx$ occorre integrare per parti:

$$\int k\, f(kx)dx=\int k^2x\sin(kx)dx=k\int x\cdot k\sin(kx)dx=-kx\cos(kx)+k\int\cos(kx)dx=$$

$$-kx\cos(kx)+\sin(kx)+c.$$

L'integrale definito richiesto vale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}}k^2x\sin(kx)dx=\left[-kx\cos(kx)+\sin(kx)\right]_0^{\frac{\pi}{k}}=-\pi\cos\pi+\sin\pi-0=\pi,$$

pertanto il suo valore non dipende dalla scelta di k.

3 Per ipotesi si ha che $AM\cong BM\cong CM$.
I triangoli AMB e AMC sono isosceli rispettivamente sulle basi AB e AC, per cui in particolare $M\widehat{A}B\cong M\widehat{B}A$ e $M\widehat{C}A\cong M\widehat{A}C$.
Detto $M\widehat{A}B=M\widehat{B}A=\alpha$, per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo AMB si ha che $A\widehat{M}C=2\alpha$; poiché inoltre la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°, risulta:

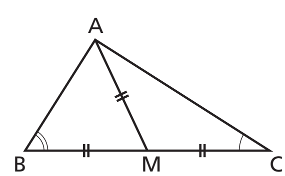


Figura 12

$$M\widehat{C}A=M\widehat{A}C=\frac{180°-2\alpha}{2}=90°-\alpha.$$

Perciò per l'angolo $B\widehat{A}C$ troviamo $B\widehat{A}C = M\widehat{A}B + M\widehat{A}C = \alpha + (90° - \alpha) = 90°$, quindi il triangolo ABC è rettangolo.

4 Il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano π: $x - 2y + 2z = 3$ perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione, si ottiene $1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$ che è un'uguaglianza verificata.
Per la condizione di tangenza, il centro C della superficie sferica appartiene alla retta r passante per il punto T e perpendicolare al piano π.
L'equazione parametrica della retta r è:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Il centro $C(1 + t; -2t; 1 + 2t)$ della superficie sferica è equidistante dai punti T e P. Per trovare t risolviamo l'equazione:

$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}^2 \rightarrow \cancel{(1+t-1)^2} + \cancel{(-2t)^2} + (1 + 2t - 1)^2 =$$
$$\cancel{(1+t-1)^2} + \cancel{(-2t)^2} + (1 + 2t - 5)^2 \rightarrow 4t^2 = 4t^2 + 16 - 16t \rightarrow t = 1,$$

per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.
In alternativa, avremmo potuto usare il fatto che il centro C della superficie sferica appartiene al piano luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti $T(1; 0; 1)$ e $P(1; 0; 5)$. Tale piano, che chiamiamo α:

- è perpendicolare al vettore $\overline{TP}$ di componenti $(1 - 1; 0 - 0; 5 - 1)$, ovvero $\overline{TP}(0; 0; 4)$, e quindi α è parallelo al piano coordinato Oxy;
- passa per il punto medio di TP, di coordinate $\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (1; 0; 3)$.

L'equazione del piano α è dunque $z = 3$.
Il punto C si ottiene dall'intersezione tra r e α.
Sostituendo le equazioni parametriche di r nell'equazione di α troviamo: $1 + 2t = 3 \rightarrow t = 1$, per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.

Il raggio della superficie sferica vale $\overline{CT} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2} = 3$.

L'equazione della superficie sferica richiesta è pertanto:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0.$$

5 Calcoliamo le probabilità richieste secondo l'approccio classico, col rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili.
Se da un mazzo di 40 carte da gioco si estraggono contemporaneamente 6 carte, i casi possibili sono: $C_{40,6}$.

- Se nessuna delle carte estratte è rossa, significa che tutte e 6 le carte estratte fanno parte delle 20 carte nere presenti nel mazzo. I casi favorevoli a questo evento sono: $C_{20,6}$. La prima probabilità richiesta vale dunque:

$$p_1 = \frac{C_{20,6}}{C_{40,6}} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35} = \frac{34}{3367} \simeq 1\%.$$

- Se tra le carte estratte vi sono esattamente 2 assi, significa che 2 carte devono essere scelte tra i 4 assi mentre le restanti 4 carte devono far parte delle 36 carte del mazzo che non sono assi. I casi favorevoli di questo evento sono $C_{4,2} \cdot C_{36,4}$. La seconda probabilità richiesta vale dunque:

$$p_2 = \frac{C_{4,2} \cdot C_{36,4}}{C_{40,6}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{4}}{\binom{40}{6}} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{\cancel{36} \cdot \cancel{35} \cdot 34 \cdot 33}{\cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{6!}^{6 \cdot 5}}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot \cancel{36} \cdot \cancel{35}} = \frac{1683}{18278} \simeq 9{,}2\%.$$

6 Quando l'elettrone entra nel condensatore viene deflesso verso l'alto a causa del campo elettrico esistente tra le armature. Dai dati del problema, deduciamo che tale deflessione non gli impedisce di uscire dal condensatore. Una volta uscito, l'elettrone prosegue di moto rettilineo uniforme conservando l'inclinazione della traiettoria presente nel punto di uscita. Per descrivere il moto dell'elettrone, scegliamo un sistema di riferimento *Oxy* con origine *O* nel punto d'ingresso dell'elettrone, asse *x* orizzontale e asse *y* verticale.

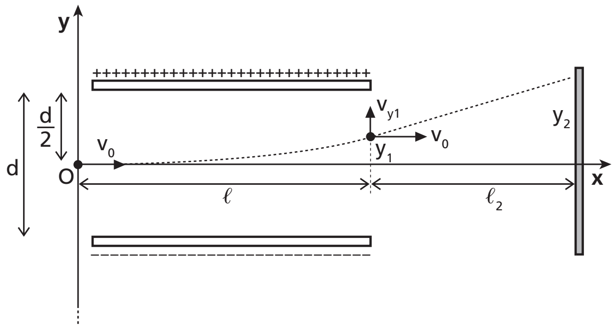


Figura 13

All'interno del condensatore, esiste un campo elettrico E che dipende dalla differenza di potenziale V e dalla distanza d tra le armature secondo la formula:

$$E = \frac{V}{d}.$$

Quando entra nel condensatore, l'elettrone è quindi soggetto a una forza F verticale e costante, diretta verso l'alto. Indicando con e il valore assoluto della carica dell'elettrone, la forza risulta:

$$F = eE = \frac{eV}{d}.$$

Indicando con m la massa dell'elettrone, questa forza produce un'accelerazione:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eV}{md} = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(15\ \mathrm{V})}{(9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})(3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})} = 8{,}8 \cdot 10^{13} \mathrm{m/s^2}.$$

Il moto dell'elettrone è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità v_0 e di un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y con accelerazione a. Il tempo impiegato dall'elettrone per attraversare la lunghezza l del condensatore è:

$$t_1 = \frac{l}{v_0} = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{2{,}5 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \mathrm{s}.$$

Lo spazio nel frattempo percorso lungo la direzione verticale è:

$$y_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2}(8{,}8 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m/s^2})(1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s})^2 = 0{,}011\ \mathrm{m}.$$

La componente verticale della velocità con cui l'elettrone esce dal condensatore, e che rimane costante durante il resto del moto, è:

$$v_1 = a t_1 = (8{,}8 \cdot 10^{13} \mathrm{m/s^2})(1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}) = 1{,}4 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}.$$

Ne segue che per avere una deflessione finale $y_2 = 20$ cm deve trascorrere un intervallo di tempo:

$$t_2 = \frac{y_2 - y_1}{v_1} = \frac{0{,}20\ \mathrm{m} - 0{,}011\ \mathrm{m}}{1{,}4 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

Nel frattempo, lo spazio percorso nel moto rettilineo orizzontale è:

$$l_2 = v_0 t_2 = (2{,}5 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s})(1{,}3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}) = 33\ \mathrm{cm}.$$

Lo schermo deve pertanto essere posto a una distanza:

$$L = l + l_2 = 4{,}0\ \mathrm{cm} + 33\ \mathrm{cm} = 37\ \mathrm{cm}.$$

7 Il protone e la particella α si respingono a vicenda poiché sono entrambe cariche positivamente. Dato che la forza elettrica è conservativa, l'energia meccanica del sistema delle due particelle si conserva. Assumiamo che il protone venga sparato esattamente lungo la direzione congiungente il protone con la particella α. Mentre il protone si avvicina alla particella α esso diminuisce la propria velocità. Viceversa, la particella α aumenta la propria velocità lungo la stessa direzione e lo stesso verso del moto del protone. Tuttavia, la velocità del centro di massa si mantiene costante dato che non esistono forze esterne agenti sulle due particelle. La velocità v_{cm} del centro di massa può essere determinata nella situazione iniziale:

$$v_{\mathrm{cm}} = \frac{m_p v_0 + m_\alpha \cdot 0}{m_p + m_\alpha} = \frac{m_p v_0}{m_p + m_\alpha}.$$

Fintanto che la particella α vede il protone avvicinarsi a essa, la distanza tra le due particelle diminuisce. La distanza di massimo avvicinamento r si verifica perciò quando il protone annulla la sua velocità rispetto alla particella α. In questa situazione, le due particelle si muovono alla stessa velocità v rispetto al sistema di riferimento esterno. Di conseguenza, tale velocità deve coincidere con la velocità del centro di massa:

$$v = \frac{m_p v_0}{m_p + m_\alpha}.$$

Per determinare la distanza r di massimo avvicinamento si può applicare la conservazione dell'energia meccanica del sistema delle due particelle. L'energia meccanica iniziale deve essere uguale a quella finale:

$$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v^2$$

in cui r_0 è la distanza iniziale. La distanza di massimo avvicinamento risulta:

$$r = \frac{1}{\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{\pi\varepsilon_0}{e^2}\left[m_p v_0^2 - (m_p + m_\alpha) v^2\right]} = \frac{1}{\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{\pi\varepsilon_0}{e^2}\left[m_p v_0^2 - (m_p + m_\alpha)\dfrac{m_p^2 v_0^2}{(m_p + m_\alpha)^2}\right]} =$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{\pi\varepsilon_0 m_p m_\alpha v_0^2}{e^2 (m_p + m_\alpha)}} =$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{10 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} + \dfrac{\pi(8,854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m})(1,673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(6,645 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(5,00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2}{(1,602 \cdot 10^{-19}\ C)^2 (1,673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} + 6,645 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})}} =$$

$$2,8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}.$$

8 Per annullare la forza $\vec{F}_B = -e\vec{v}_0 \times \vec{B}$ esercitata sull'elettrone dal campo magnetico, il campo elettrico $\vec{E}$ deve generare una forza $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ di uguale direzione e modulo, ma di verso opposto:

$$-e\vec{E} = -(-e\vec{v}_0 \times \vec{B})$$

per cui:

$$\vec{E} = -\vec{v}_0 \times \vec{B}.$$

Indicato con θ l'angolo di 10° formato da $\vec{v}_0$ e $\vec{B}$, per avere l'uguaglianza dei moduli nella relazione precedente deve risultare:

$$E = v_0 B \sin\theta = (1,5 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s})(0,20\ \mathrm{T}) \sin 10° \simeq 521\ \mathrm{V/m}.$$

La direzione del campo elettrico deve essere perpendicolare al piano formato dal vettore velocità $\vec{v}_0$ dell'elettrone e dal vettore campo magnetico $\vec{B}$. Il verso deve essere opposto a quello calcolato con la regola della mano destra applicata ai vettori $\vec{v}_0$ e $\vec{B}$. Con riferimento alla figura qui a fianco, il campo elettrico risulta perpendicolare e uscente dal foglio.

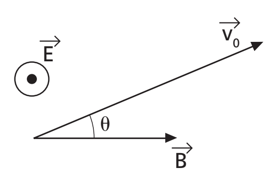


Figura 14