Scuole italiane all'estero • Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Considerata la funzione $G:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$G(x) = \int_0^{2x} e^t \sin^2(t)\,dt,$$

svolgi le richieste che seguono.

1. Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione $G(x)$. Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
2. Determina l'esistenza degli asintoti della funzione $G(x)$, motivando opportunamente la risposta.
3. Individua i punti stazionari della funzione $G(x)$, riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.
4. Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione $G(x)$ nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

PROBLEMA 2

Sia Γ il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} \qquad k \in \mathbb{R}, k > 0$$

definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

1. Relativamente al grafico Γ, mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso P in funzione del parametro k e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da k.
2. Dopo aver verificato che la funzione $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$ è una primitiva di f, determina l'area della regione piana compresa tra Γ, l'asse y, l'asse x e la retta di equazione $x = \log(\alpha)$. Che valore deve assumere α perché tale area sia uguale a 1?
3. Dimostra che

   $$g(x) = \log\left(\frac{kx}{1 - x}\right),$$

   è la funzione inversa di f e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione g è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione h, definita come

   $$h(x) = f(x) + g(x),$$

   interseca l'asse x in un unico punto.
4. Considerata, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione

   $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

   determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di $F(x)$.

QUESTIONARIO

1 Tre circonferenze di raggio 1 sono tangenti esternamente una all'altra. Qual è l'area della regione interna che esse delimitano?

2 In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere, sapendo che estraendo 2 biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è $\frac{27}{38}$.

3 Dato un cilindro equilatero e la sfera a esso circoscritta, qual è la probabilità che un punto interno alla sfera cada all'interno del cilindro?

4 Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

e l'asse delle x nell'intervallo $[0; 3]$; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza kx, con $k \in \mathbb{R}$. Determinare k in modo che il volume del solido sia pari a 2.

5 Il grafico di un polinomio di 3° grado è tangente all'asse x nell'origine e interseca nuovamente l'asse x in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da 0. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse x e il grafico del polinomio, sapendo che anche tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.

6 Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$. Il grafico riportato è simmetrico rispetto all'origine ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $5x + 2y = 0$.
Descrivere le principali caratteristiche relative all'andamento della funzione $f(x)$ e tracciarne, indicativamente, un possibile grafico. Tracciare inoltre il grafico della funzione $f''(x)$.

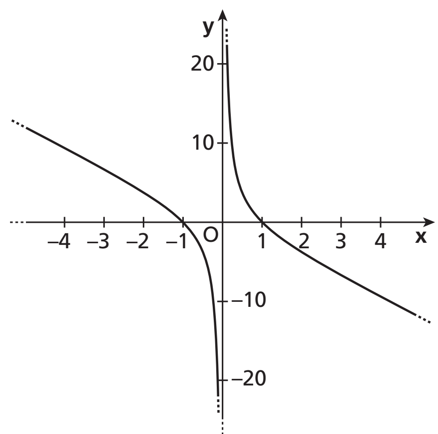


Figura 1

7 Sono date le funzioni $f(x) = e^{3-x}$ e $g(x) = e^{2x}$. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di f e di g.

8 Un giocatore di basket si esercita ai tiri liberi. Normalmente ha una quota di canestri dell'80%.
Con quale probabilità va a canestro esattamente due volte su tre tiri?
Individua un evento E per il quale valga:

$$P(E) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}.$$

9 Dati i punti $A(4; 14; 17)$, $B(16; 11; 14)$, $C(16; 2; 23)$:

a. si dimostri che il triangolo ABC è isoscele e rettangolo;

b. quali sono le coordinate del punto D tale che $ABCD$ sia un quadrato?

10 Si considerino nello spazio il punto $P(1; 2; -1)$ ed il piano α di equazione $x - 2y + z + 4 = 0$.

a. Verificare che $P \in \alpha$;

b. determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad α in P.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione integranda

$$g(x) = e^x \sin^2 x,$$

è definita e continua per ogni x reale.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale

$$H(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x (e^t \sin^2 t)dt$$

è continua e derivabile con

$$H'(x) = g(x).$$

La funzione data

$$G(x) = \int_0^{2x} (e^t \sin^2 t)dt$$

può essere allora vista come la composizione della funzione $h(x) = 2x$ con $H(x)$:

$$G(x) = H(2x) = H(h(x)).$$

Poiché $H(x)$ e $h(x)$ sono derivabili, anche $G(x)$ è derivabile (e definita e continua) in $\mathbb{R}$, con:

$$G'(x) = H'(h(x)) \cdot h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x) = (e^{2x} \sin^2 2x) \cdot 2 = 2e^{2x} \sin^2 2x.$$

Studiamo il segno e le intersezioni con gli assi di $G(x)$.

Poiché la funzione integranda $g(x) = e^x \sin^2 x$ è sempre positiva e nulla solo nei punti $x = k\pi$, con k intero, la funzione $G(x)$ risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Infatti:

per $x > 0$, $G(x) = \int_0^{2x} g(t)dt > 0$;

per $x < 0$, $G(x) = \int_{2x}^0 g(t)dt > 0 \rightarrow G(x) = -\int_{2x}^0 g(t)dt < 0$.

L'unico punto di intersezione del grafico di $G(x)$ con gli assi è allora l'origine del sistema di riferimento, in quanto $G(0) = 0$.

2. La funzione $G(x)$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi non ha asintoti verticali.
Stabiliamo se la funzione $G(x)$ ammette asintoti destro o sinistro.
Per $x > 0$, la funzione integranda $g(x) = e^x \sin^2 x$ oscilla fra 0 e e^x, quindi l'area sottesa da $g(x)$ aumenta sempre più, in modo esponenziale, all'aumentare di x.

In particolare, in ogni intervallo del tipo $[n\pi; (n+1)\pi]$ il grafico di $g(x)$ presenta un "pinnacolo" come illustrato in figura a pagina seguente, con $g(n\pi) = g((n+1)\pi) = 0$.

Questi pinnacoli hanno la base di ampiezza π e l'altezza che segue l'andamento di $y = e^x$, quindi la loro area aumenta sempre più, in maniera esponenziale.

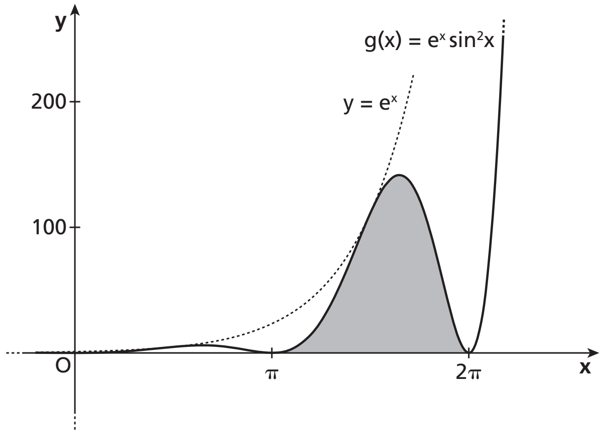


Figura 2

Nel calcolo di $G(x)$, all'aumentare di x, si vanno a sommare man mano le aree di questi pinnacoli, pertanto $G(x)$ ha un andamento esponenziale per $x > 0$ e non ammette asintoto per $x \to +\infty$.

Volendo formalizzare la situazione, cerchiamo un minorante per l'area del pinnacolo, facile da calcolare. Osserviamo che in ogni intervallo $[n\pi; (n+1)\pi]$ è sicuramente:

$$e^x \sin^2 x \geq e^{n\pi} \sin^2 x,$$

quindi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x)\, dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{n\pi} \sin^2 x)\, dx = e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\, dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx \ \rightarrow$$

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int 1\, dx \ \rightarrow \ \int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x + c).$$

L'integrale indefinito risulta allora:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} =$$

$$\left[\frac{1}{2}(-\cos(n+1)\pi \cdot \sin(n+1)\pi + (n+1)\pi)\right] - \left[\frac{1}{2}(-\cos n\pi \cdot \sin n\pi + n\pi)\right] =$$

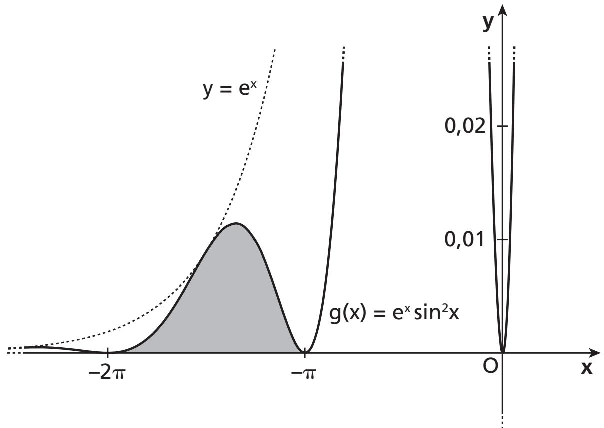
$$\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi\right] - \left[\frac{1}{2} n\pi\right] = \frac{\pi}{2}$$

ottenendo infine la minorazione:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x)\, dx \geq e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}.$$

L'area del pinnacolo relativo all'intervallo $[n\pi; (n+1)\pi]$ è dunque maggiore di $\frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}$, e quindi ha un andamento di tipo esponenziale man mano che gli intervalli considerati si spostano verso destra.
La funzione $G(x)$, che rappresenta l'area dei pinnacoli compresi nell'intervallo $[0; 2x]$, ha pertanto andamento esponenziale e non ammette asintoto obliquo (né, ovviamente, orizzontale).

Per $x < 0$ potremmo procedere in maniera simile, valutando l'area dei pinnacoli e mostrare che queste aree tendono a 0 per $x \to -\infty$, sempre con andamento esponenziale, in modo tale che il loro contributo nel calcolo di $G(x)$ è così ridotto da portare a un asintoto orizzontale.



■ **Figura 3**

Possiamo procedere però più rapidamente, osservando che

$$g(x) = e^x \sin^2 x \leq e^x,$$

quindi l'area sottesa al grafico di $g(x)$ in $]-\infty; 0]$ è sicuramente positiva e inferiore dell'area A sottesa a $y = e^x$:

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \to -\infty} [e^x]_t^0 = \lim_{t \to -\infty} (e^0 - e^t) = 1.$$

Quindi, l'area sottesa dal grafico di $g(x)$ in $]-\infty; 0]$ è un valore a compreso fra 0 e 1.

Otteniamo allora:

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_0^{2x} g(x) dx = \lim_{x \to -\infty} - \int_{2x}^{0} g(x) dx = -\left(\lim_{x \to -\infty} \int_{2x}^{0} g(x) dx \right) = -a,$$

dove abbiamo scambiato gli estremi di integrazione e cambiato il segno all'integrale, perché $x < 0$.

La funzione $G(x)$ presenta dunque un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = -a$, con $-1 < -a < 0$.

3. Cerchiamo i punti stazionari di $G(x)$ studiando gli zeri e il segno della derivata prima.
La derivata prima $G'(x) = 2e^{2x} \sin^2 2x$ è sempre positiva, tranne nei punti dove si annulla:

$$G'(x) = 0 \quad \to \quad 2e^{2x} \sin^2 2x = 0 \quad \to \quad \sin 2x = 0 \quad \to \quad 2x = k\pi \quad \to \quad x = k\frac{\pi}{2},$$

con k intero.

La funzione $G(x)$ è quindi crescente in $\mathbb{R}$ e presenta in $x = k\frac{\pi}{2}$ punti di flesso a tangente orizzontale.

Per i flessi, calcoliamo la derivata seconda:

$$G''(x) = D[2e^{2x} \sin^2 2x] = 2 \cdot 2e^{2x} \sin^2 2x + 2e^{2x} \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4e^{2x} \sin 2x (\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x).$$

Determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$G''(x) = 0 \quad \to \quad \sin 2x = 0 \ \vee \ \sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0.$$

Dal primo termine ricaviamo:

$$\sin 2x = 0 \quad \to \quad x = k\frac{\pi}{2};$$

il secondo termine porta a:

$$\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -2 \quad \rightarrow \quad \tan 2x = -2 \quad \rightarrow$$

$$2x = \arctan(-2) + k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2},$$

con $\alpha = \frac{1}{2}\arctan(-2) \simeq -0{,}55$, (abbiamo diviso entrambi i membri per $\cos 2x$ perché i punti che annullano $\cos 2x$ non sono soluzione dell'equazione).

Studiamo ora il segno di:

$$\sin 2x(\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x) =$$
$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2),$$

che coincide col segno di $G''(x)$.

Osservando il disegno a lato, dove sull'asse delle ascisse abbiamo riportato il valore dell'argomento $2x$, possiamo dedurre il segno in ogni intervallo; otteniamo:

$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2) \geq 0 \text{ per}$$

$$0 + k\pi \leq 2x \leq 2\alpha + \pi + k\pi \ \rightarrow$$

$$k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

La derivata seconda $G''(x)$ è dunque positiva, e $G(x)$ volge la concavità verso l'alto, per

$$k\frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2};$$

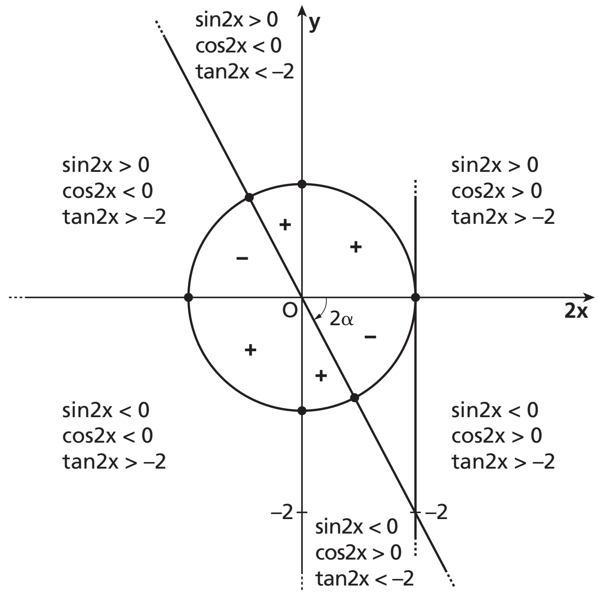


Figura 4

negli altri intervalli $G''(x)$ è negativa o nulla e $G(x)$ volge la concavità verso il basso.
I punti di flesso hanno coordinate:

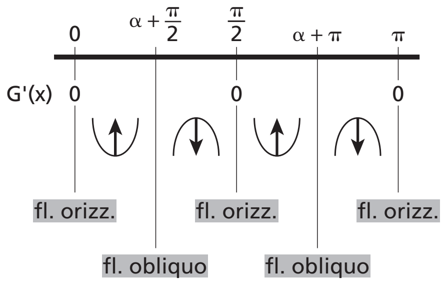
$$2x = k\pi \ \vee \ 2x = 2\alpha + k\pi \quad \rightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \ \vee \ x = \alpha + k\frac{\pi}{2};$$

in particolare $x = k\frac{\pi}{2}$ sono punti di flesso a tangente orizzontale, $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

Riassumendo, la funzione $G(x)$:

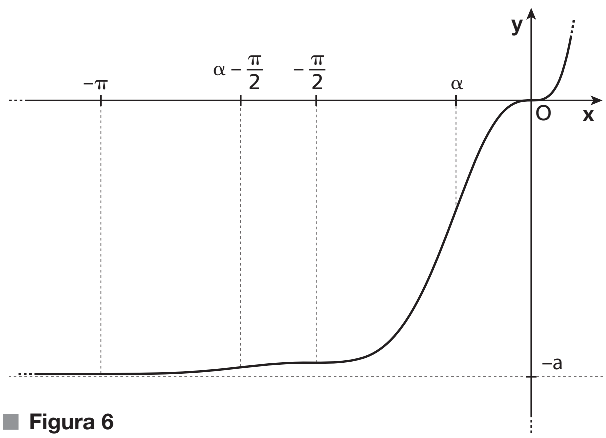
- è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$, si annulla in $x = 0$;
- ha asintoto orizzontale sinistro $y = -a$, con $-1 < -a < 0$;
- ha punti di flesso a tangente orizzontale in $x = k\frac{\pi}{2}$;
- ha punti di flesso a tangente obliqua in $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$;
- volge la concavità verso l'alto in $k\frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$, verso il basso altrove.

Per individuare i punti caratteristici del grafico, ricordiamo che $\alpha \simeq -0{,}55$, $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ e $\pi \simeq 3{,}14$, quindi nell'intervallo $[0; \pi]$ la situazione dei flessi e dei punti stazionari è schematizzata nel seguente disegno (i punti si susseguono poi con periodicità π).

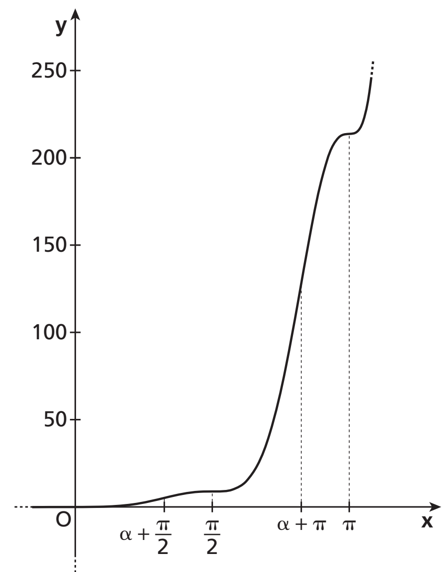


■ **Figura 5**

Siamo ora in grado di disegnare un grafico approssimato della funzione.
Considerati i valori in gioco (che aumentano esponenzialmente per $x > 0$, mentre tendono rapidamente all'asintoto orizzontale per $x < 0$), disegniamo due grafici separati per $G(x)$.



■ **Figura 6**



■ **Figura 7**

4. I punti di flesso a tangente obliqua hanno coordinate $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$, con $\alpha \simeq -0,55$ e k intero.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $G(x)$, in tali punti, vale:

$$G'\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{2\cdot\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)}\sin^2\left[2\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2e^{2\alpha + k\pi}\sin^2(2\alpha + k\pi) = 2e^{2\alpha + k\pi}\sin^2 2\alpha,$$

quindi i coefficienti angolari differiscono uno dall'altro, per la presenza del fattore $e^{2\alpha + k\pi}$ che varia al variare di k.
Le rette tangenti al grafico nei punti di flesso obliquo *non* formano un fascio di rette parallele.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + ke^{-x}} = (1 + ke^{-x})^{-1}$, con $k \in \mathbb{R}^+$.

La funzione è definita e derivabile in $\mathbb{R}$; per determinare i punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = -1\cdot(1 + ke^{-x})^{-2}\cdot(-ke^{-x}) = ke^{-x}(1 + ke^{-x})^{-2};$$

$$f''(x) = -ke^{-x}(1+ke^{-x})^{-2} + ke^{-x}\cdot(-2)(1+ke^{-x})^{-3}\cdot(-ke^{-x}) =$$

$$-ke^{-x}(1+ke^{-x})^{-2} + 2k^2e^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3} = ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}[-e^{x}(1+ke^{-x})+2k] =$$

$$ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}[-e^{x}-k+2k] = ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}(k-e^{x}).$$

Gli zeri e il segno di $f''(x)$ sono individuati dall'ultimo fattore:

$$f''(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad k-e^{x} \geq 0 \quad \rightarrow \quad e^{x} \leq k \quad \rightarrow \quad x \leq \ln k.$$

La funzione $f(x)$ volge quindi la concavità verso l'alto per $x < \ln k$, verso il basso per $x > \ln k$ e in $x = \ln k$ presenta un flesso.

L'ordinata del flesso è:

$$f(\ln k) = \frac{1}{1+ke^{-\ln k}} = \frac{1}{1+k\cdot\frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

quindi il punto di flesso ha coordinate $P\left(\ln k; \frac{1}{2}\right)$.

La retta tangente a Γ in P ha coefficiente angolare pari a:

$$f'(\ln k) = ke^{-\ln k}(1+ke^{-\ln k})^{-2} = k\cdot\frac{1}{k}\left(1+k\cdot\frac{1}{k}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

La pendenza della retta tangente nel punto di flesso vale sempre $\frac{1}{4}$, quindi è indipendente dal valore di k.

2. Osserviamo che la funzione "log" usata nel testo del problema indica la funzione logaritmo naturale (in base e). Verifichiamo dunque che $p(x) = \ln(1+ke^{-x}) + x$ è una primitiva di $f(x)$, cioè proviamo che $p'(x) = f(x)$:

$$p'(x) = \frac{1}{1+ke^{-x}}\cdot(-ke^{-x}) + 1 = \frac{-ke^{-x}+1+ke^{-x}}{1+ke^{-x}} = \frac{1}{1+ke^{-x}} = f(x).$$

Tracciamo il grafico approssimativo di $f(x)$, in modo da rappresentare la regione indicata dal problema. Oltre a quanto già dedotto su $f(x)$, osserviamo che:

- la funzione è positiva su $\mathbb{R}$;
- la derivata prima è sempre positiva, quindi $f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, quindi la funzione ha l'asse x come asintoto orizzontale sinistro;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, quindi la funzione ha la retta $y = 1$, come asintoto orizzontale destro.

Possiamo tracciare il grafico Γ della funzione. A titolo di esempio, disegniamo il grafico nel caso $k = 1$.

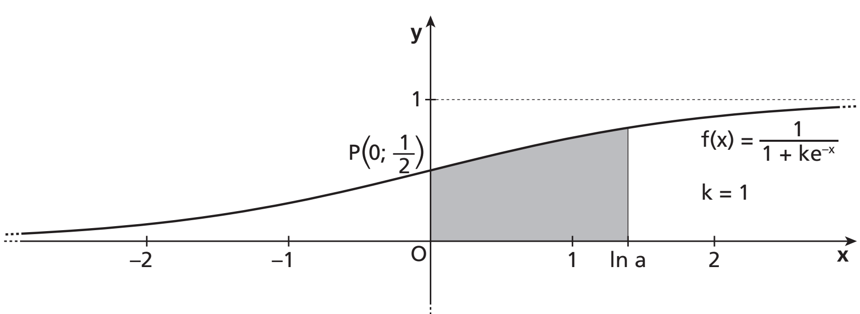


Figura 8

Se $\ln\alpha > 0$, cioè $\alpha > 1$, la retta $x = \ln\alpha$ e la regione R di cui dobbiamo calcolare l'area si trovano a destra dell'asse delle ordinate (come esemplificato in figura).
Se $\ln\alpha < 0$, cioè $0 < \alpha < 1$, la retta $x = \ln\alpha$ e la regione R si trovano a sinistra dell'asse delle ordinate.
Se $\ln\alpha = 0$, cioè $\alpha = 1$, la retta $x = \ln\alpha$ si trova sull'asse delle ordinate e l'area della regione è nulla.
Calcoliamo l'area A della regione nei primi due casi.

Se $\ln a > 1$:

$$A = \int_0^{\ln a} f(x)dx = [p(x)]_0^{\ln\alpha} = [\ln(1 + ke^{-\ln\alpha}) + \ln\alpha] - [\ln(1 + ke^{-0}) + 0] =$$

$$\ln\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) + \ln\alpha - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{\alpha}\right) + \ln\alpha - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\frac{\alpha + k}{\alpha}\cdot\alpha}{1 + k}\right) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Se $0 < \alpha < 1$:

$$A = \int_{\ln\alpha}^0 f(x)dx = -\int_0^{\ln\alpha} f(x)dx = -\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Determiniamo α in modo che l'area della regione sia 1.

Se $\alpha > 1$:

$$\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{\alpha + k}{1 + k} = e \quad \to \quad \alpha = e(1 + k) - k.$$

Osserviamo che:

$$e(1 + k) - k = e + k(e - 1) > 1,$$

quindi la soluzione $\alpha = e(1 + k) - k$ è accettabile, per ogni $k > 0$:

Se $0 < \alpha < 1$:

$$-\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{\alpha + k}{1 + k} = \frac{1}{e} \quad \to \quad \alpha = \frac{1 + k}{e} - k.$$

Imponiamo che il valore trovato sia compreso fra 0 e 1:

$$\frac{1 + k}{e} - k > 0 \quad \to \quad 1 + k - ek > 0 \quad \to \quad k(e - 1) < 1 \quad \to \quad k < \frac{1}{e - 1};$$

$$\frac{1 + k}{e} - k < 1 \quad \to \quad 1 + k - ek < e \quad \to \quad k(e - 1) > 1 - e \quad \to \quad \forall k > 0.$$

Quindi la soluzione $\alpha = \dfrac{1 + k}{e} - k$ è accettabile solo per $0 < k < \dfrac{1}{e - 1}$, con $\alpha = \dfrac{1}{e - 1} \simeq 0{,}582$.

3. Abbiamo già dimostrato che $f(x)$ è crescente, quindi è invertibile. Mostriamo ora che la funzione

$$g(x) = \ln\left(\frac{kx}{1 - x}\right)$$

è l'inversa di $f(x)$ facendo vedere che entrambe le composizioni di funzioni $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ corrispondono alla funzione identità:

$$f(g(x)) = f\left(\ln\left(\frac{kx}{1 - x}\right)\right) = \frac{1}{1 + ke^{-\ln\frac{kx}{1-x}}} = \frac{1}{1 + k\cdot\frac{1 - x}{kx}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - x}{x}} = \frac{x}{x + 1 - x} = x,$$

uguaglianza valida nel dominio $0 < x < 1$ di $g(x)$;

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+ke^{-x}}\right) = \ln \frac{k\frac{1}{1+ke^{-x}}}{1-\frac{1}{1+ke^{-x}}} = \ln\left(\frac{k}{1+ke^{-x}} \cdot \frac{1+ke^{-x}}{1+ke^{-x}-1}\right) = \ln\frac{1}{e^{-x}} = \ln e^{x} = x.$$

Il grafico di $g(x)$ può essere allora ottenuto da quello di $f(x)$ tramite simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante.

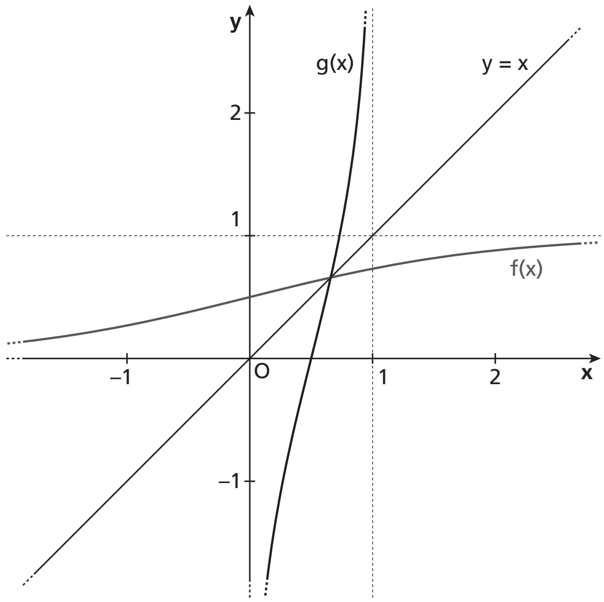


Figura 9

La funzione $g(x)$ è definita e continua in $0 < x < 1$, è sempre crescente (perché è crescente $f(x)$ e per la simmetria) e ha gli asintoti verticali $x = 0$ e $x = 1$; risulta dunque suriettiva.
La funzione $h(x) = f(x) + g(x)$ ha lo stesso dominio $0 < x < 1$ di $g(x)$, è continua in $0 < x < 1$ ed è strettamente crescente, poiché è somma di due funzioni continue e strettamente crescenti.
Inoltre, essendo $f(x)$ limitata in $]0; 1[$, risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} [f(x) + g(x)] = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Possiamo concludere che la funzione $h(x)$ è continua, strettamente crescente e suriettiva, quindi il suo grafico interseca una e una sola volta l'asse delle ascisse.

4. Ricordiamo che la funzione $p(x)$ è una primitiva di $f(x)$, quindi:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = [p(t)]_0^x = [\ln(1+ke^{-x}) + x] - [\ln(1+ke^{-0}) + 0] = \ln(1+ke^{-x}) + x - \ln(1+k).$$

La funzione integrale è definita e continua su $\mathbb{R}$, quindi non presenta asintoti verticali.
Studiamo l'esistenza dell'asintoto destro.
Dal limite:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} [\ln(1+ke^{-x}) + x - \ln(1+k)] = 0 + \infty - \ln(1+k) = +\infty,$$

deduciamo che potrebbe esistere l'asintoto obliquo. Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(1+ke^{-x})}{x} + \frac{x}{x} - \frac{\ln(1+k)}{x}\right] = 0 + 1 - 0 = 1;$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}[F(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty}[\ln(1+ke^{-x}) + x - \ln(1+k) - x] = 0 - \ln(1+k) = -\ln(1+k).$$

I due limiti sono finiti, quindi $F(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x - \ln(1+k)$ per $x \to +\infty$.
Studiamo l'esistenza dell'asintoto sinistro.
Il limite:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x}) + x - \ln(1+k)]$$

si presenta nella forma $+\infty - \infty - \ln(1+k)$.
Risolviamo la forma indeterminata costituita dai primi due termini:

$$\lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x}) + x] = \lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x}) + \ln e^{x}] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln[e^{x}(1+ke^{-x})] = \lim_{x\to-\infty}\ln(e^{x}+k) = \ln k,$$

quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \ln k - \ln(1+k) = \ln\frac{k}{1+k}$$

e la funzione $F(x)$ presenta l'asintoto orizzontale di equazione $y = \ln\frac{k}{1+k}$ per $x \to -\infty$.
Per tracciare il grafico di $F(x)$ consideriamo che:

- $F(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$;
- $F(x)$ è sempre crescente, poiché $F'(x) = f(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$;
- $F(0) = 0$ e, poiché è crescente, risulta $F(x) < 0$ per $x < 0$ e $F(x) > 0$ per $x > 0$;
- $F(x)$ volge sempre la concavità verso l'alto, poiché $F''(x) = f'(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$;
- $F(x)$ ha due asintoti di equazione $y = \ln\frac{k}{1+k}$ e $y = x - \ln(1+k)$.

Con queste informazioni, tracciamo il grafico plausibile di $F(x)$.

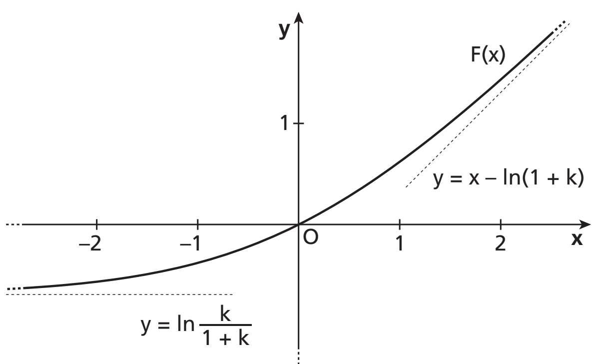


Figura 10

QUESTIONARIO

1 I centri delle tre circonferenze di raggio 1 e tangenti esternamente rappresentano i vertici di un triangolo equilatero di lato 2.
L'area della regione R interna delimitata dalle circonferenze può essere calcolata come differenza fra l'area del triangolo equilatero e l'area dei tre settori circolari di raggio 1 e ampiezza 60°, equivalenti ad un unico settore circolare di raggio 1 e ampiezza 180°, cioè ad un semicerchio di raggio 1.

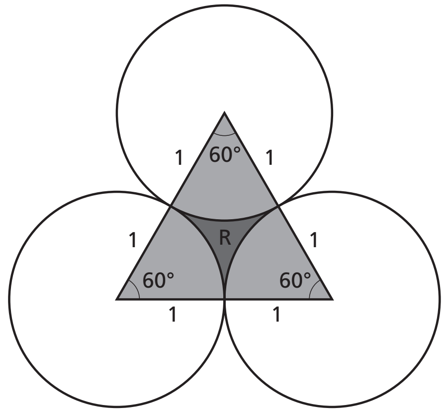


Figura 11

Otteniamo:

$$Area(R) = Area_{\text{triangolo}} - Area_{\text{semicerchio}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot base \cdot altezza - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot raggio^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \simeq 0{,}16.$$

2 Indichiamo con n il numero delle biglie nere.
Eseguiamo due estrazioni senza reimmissione della pallina e imponiamo che la probabilità p di estrarre almeno una pallina nera sia $\frac{27}{38}$.
Considerati gli eventi:
E_1 = «prima pallina estratta è nera», E_2 = «seconda pallina estratta è nera»,
e gli eventi contrari:
$\overline{E_1}$«prima pallina estratta è rossa», $\overline{E_2}$ «seconda pallina estratta è rossa»,
la probabilità di estrarre almeno una pallina nera è data dalla probabilità che la prima pallina sia nera (è indifferente a questo punto il colore della seconda pallina) più la probabilità che la prima pallina sia rossa e la seconda nera:

$$p = p(E_1) + p(\overline{E_1}) \cdot p\left(E_2 \,\middle|\, \overline{E_1}\right) = \frac{n}{20} + \frac{20-n}{20} \cdot \frac{n}{19} = \frac{27}{38} \rightarrow$$

$$19n + n(20-n) = 270 \rightarrow n^2 - 39n + 270 = 0 \rightarrow$$

$$n = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 4 \cdot 270}}{2} = \frac{39 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{39 \pm 21}{2} \rightarrow n = \frac{39-21}{2} = 9.$$

Nell'urna ci sono quindi 9 palline nere e 11 rosse.

La soluzione $n = \frac{39+21}{2} = 30$ non è accettabile perché n deve essere minore di 20.

In alternativa, l'espressione della probabilità p in funzione di n poteva essere trovata come l'evento contrario dell'estrazione di due palline rosse:

$$p = 1 - p(\overline{E_1}) \cdot p\left(\overline{E_2} \,\middle|\, \overline{E_1}\right) = 1 - \frac{20-n}{20} \cdot \frac{19-n}{19} = \frac{27}{38}.$$

3 In un cilindro equilatero l'altezza h è uguale al diametro $2r$ del cerchio di base.
Il raggio R della sfera circoscritta si calcola col teorema di Pitagora:

$$R = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Il volume del cilindro è:

$$V_c = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

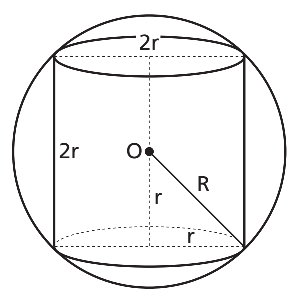


Figura 12

Il volume della sfera è:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(r\sqrt{2})^3 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\,\pi r^3.$$

Il rapporto fra il volume del cilindro e il volume della sfera fornisce la probabilità che un punto scelto a caso all'interno della sfera ricada all'interno del cilindro:

$$p = \frac{V_c}{V_s} = \frac{2\pi r^3}{\frac{8}{3}\sqrt{2}\,\pi r^3} = \frac{2}{\frac{8}{3}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \simeq 0,53 \to 53\%.$$

4 La funzione $y = x^2 + 1$, nell'intervallo $[0; 3]$, è crescente da 1 a 10. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, nello stesso intervallo, è allora decrescente da 1 a $\frac{1}{10}$.

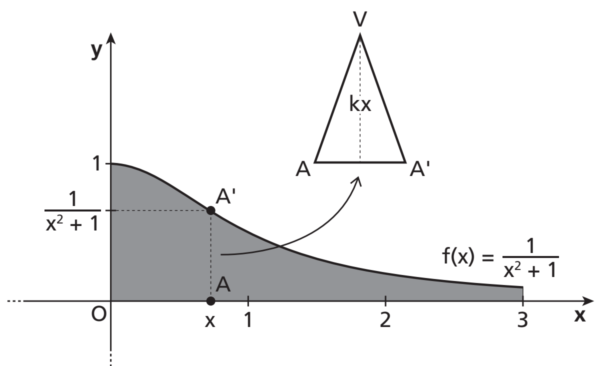


Figura 13

Fissato $x \in [0; 3]$, la sezione con un piano perpendicolare all'asse delle ascisse è un triangolo isoscele la cui base misura $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, e la cui altezza è lunga kx.

L'area del triangolo è dunque:

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot kx = \frac{k}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Osserviamo che deve essere $k \geq 0$, perché l'altezza del triangolo deve essere rappresentata da un numero non negativo.
Calcoliamo il volume V del solido integrando le aree dei triangoli per x che va da 0 a 3:

$$V = \int_0^3 \mathscr{A}(x)dx = \frac{k}{2}\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{k}{4}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{k}{4}[\ln(x^2+1)]_0^3 = \frac{k}{4}(\ln 10 - \ln 1) = \frac{k}{4}\ln 10.$$

Imponiamo che tale volume sia uguale a 2:

$$\frac{k}{4}\ln 10 = 2 \to k = \frac{8}{\ln 10} \simeq 3,47.$$

5 Un generico polinomio di terzo grado ha espressione analitica:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Determiniamo i parametri a, b, c e d imponendo le condizioni esplicitate nel quesito.

- Il grafico P del polinomio passa per l'origine:

  $$p(0) = 0 \to d = 0 \to p(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

- Il grafico P è tangente all'asse x nell'origine:

$$p'(0)=0,\ \text{con}\ p'(x)=3ax^2+2bx+c \to c=0 \to p(x)=ax^3+bx^2.$$

- Il grafico P interseca l'asse x in un altro punto di ascissa positiva:

$$p(x)=0 \to ax^3+bx^2=0 \to ax^2\left(x+\frac{b}{a}\right)=0 \to x=-\frac{b}{a} \to -\frac{b}{a}>0.$$

- Le coordinate del punto di massimo relativo sono uguali e diverse da 0.
  Determiniamo il punto di massimo relativo:

$$p'(x)=3ax^2+2bx;\quad p'(x)=0 \to 3ax^2+2bx=0 \to ax\left(3x+\frac{2b}{a}\right)=0 \to$$

$$3x+\frac{2b}{a}=0 \to x=-\frac{2b}{3a},$$

che è positivo perché $-\frac{b}{a}>0$ per un punto precedente.

Affinché il punto sia di massimo deve essere:

$$p(x)\ \text{crescente, e}\ p'(x)>0,\ \text{a sinistra di}\ x=-\frac{2b}{3a},\ \text{quando}\ 3x+\frac{2b}{a}<0;$$

$$p(x)\ \text{decrescente, e}\ p'(x)<0,\ \text{a destra di}\ x=-\frac{2b}{3a},\ \text{quando}\ 3x+\frac{2b}{a}>0.$$

Deve allora essere:

$$a<0$$

e, per il punto precedente:

$$b>0.$$

Imponiamo che l'ordinata del punto di massimo relativo sia uguale all'ascissa:

$$p\left(-\frac{2b}{3a}\right)=-\frac{2b}{3a} \to a\left(-\frac{2b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2=-\frac{2b}{3a} \to a\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2+b\left(-\frac{2b}{3a}\right)=1 \to$$

$$\frac{4}{9}\cancel{a}\frac{b^2}{a^{\cancel{2}}}-\frac{2}{3}\frac{b^2}{a}=1 \to -\frac{2}{9}\cdot\frac{b^2}{a}=1 \to a=-\frac{2}{9}b^2.$$

Il polinomio è quindi del tipo:

$$p(x)=-\frac{2}{9}b^2x^3+bx^2,\ \text{con}\ b>0.$$

- Il grafico P interseca l'asse delle ascisse, oltre che in $x=0$, anche in:

$$x=-\frac{b}{a} \to x=-b\cdot\left(\frac{-9}{2b^2}\right)=\frac{9}{2b}.$$

L'area della regione sottesa dal grafico di $p(x)$ in $\left[0;\frac{9}{2b}\right]$ è data dall'integrale:

$$A=\int_0^{\frac{9}{2b}}p(x)dx=\int_0^{\frac{9}{2b}}\left(-\frac{2}{9}b^2x^3+bx^2\right)dx=\left[-\frac{2}{9}b^2\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{9}{2b}}=$$

$$-\frac{2}{9}b^2\frac{1}{4}\left(\frac{9}{2b}\right)^4+b\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2b}\right)^3=-\frac{2}{36}b^2\left(\frac{9}{2b}\right)^4+\frac{1}{3}b\left(\frac{9}{2b}\right)^3=$$

$$-\frac{2}{36}b^2\left(\frac{9^4}{2^4b^4}\right)+\frac{1}{3}b\frac{9^3}{2^3b^3}=-\frac{729}{32b^2}+\frac{243}{8b^2}.$$

Il valore di tale area deve essere numericamente uguale all'ascissa $x=-\frac{2b}{3a}$ del punto di massimo relativo. Poiché $a=-\frac{2}{9}b^2$, il punto di massimo relativo ha ascissa:

$$x=-\frac{2b}{3a}=-\frac{2}{3}b\cdot\left(-\frac{9}{2b^2}\right)=\frac{3}{b}.$$

Quindi l'area deve valere:

$$A=\frac{3}{b}\rightarrow-\frac{729}{32b^2}+\frac{243}{8b^2}=\frac{3}{b}\rightarrow-\frac{729}{32b}+\frac{243}{8b}=3\rightarrow\left(-\frac{729}{32}+\frac{243}{8}\right)\frac{1}{b}=3\rightarrow$$

$$b=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{729}{32}+\frac{972}{32}\right)\rightarrow b=\frac{1}{3}\left(\frac{243}{32}\right)\rightarrow b=\frac{81}{32}.$$

Di conseguenza a vale:

$$a=-\frac{2}{9}b^2=-\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{81}{32}\right)^2=-\frac{729}{512}.$$

Il polinomio $p(x)$ cercato ha espressione:

$$p(x)=-\frac{729}{512}x^3+\frac{81}{32}x^2.$$

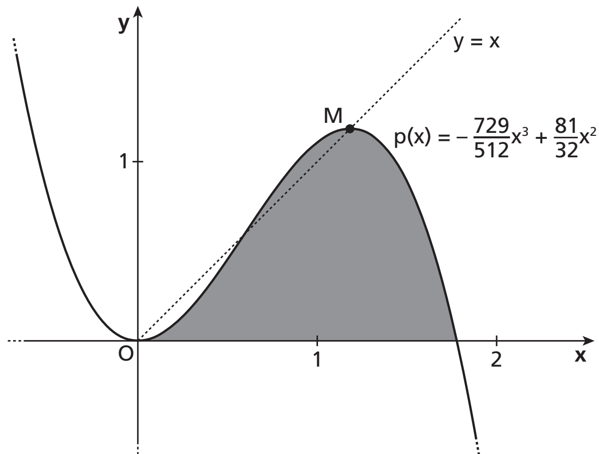


Figura 14

6 Le principali caratteristiche di $f'(x)$ e di $f(x)$ sono le seguenti:

- $f'(x)$ è una funzione dispari, quindi
  $f(x)$ è una funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y);
- $f'(x)$ è positiva per $x<-1 \vee 0<x<1$ quindi
  $f(x)$ è crescente per $x<-1 \vee 0<x<1$;
- $f'(x)$ è negativa per $-1<x<0 \vee x>1$, quindi
  $f(x)$ è decrescente per $-1<x<0 \vee x>1$;
- $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo in $x=-1$ e in $x=1$;
- $f'(x)$ non è definita in $x=0$, con $\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$; poiché $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ per ipotesi, l'unica possibilità è che $f(x)$ presenti in $x=0$ una cuspide verso il basso;
- $f'(x)$ decresce per $x<0$ e per $x>0$, quindi $f''(x)<0$ per $x\neq 0$ e $f(x)$ volge la concavità verso il basso per $x<0$ e per $x>0$;

- $f'(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y=-\frac{5}{2}x$ per $x\to\pm\infty$, questo vuol dire che per $x\to\pm\infty$, il grafico di $f'(x)$ si avvicina sempre più e ha andamento simile al grafico di $y=-\frac{5}{2}x$. La funzione $f(x)$, per $x\to\pm\infty$, ha allora andamento simile al grafico di

$$\int f'(x)dx=\int -\frac{5}{2}xdx=-\frac{5}{4}x^2+c,$$

cioè per $x\to\pm\infty$, il grafico di $f(x)$ si comporta approssimativamente come il grafico della parabola rivolta verso il basso di equazione $y=-\frac{5}{4}x^2+c$.

Disegniamo un grafico plausibile per $f(x)$; osserviamo che con le informazioni raccolte non è possibile stabilire in modo univoco a quale “altezza” disegnare il grafico. Detto in altri termini, disegnato un grafico plausibile Γ per $f(x)$, anche tutti gli altri grafici che si ottengono da Γ mediante traslazione verticale rappresentano grafici plausibili per $f(x)$. Questo discende dal fatto che tutte le funzioni del tipo $f(x)+k$, con k costante, hanno per derivata la funzione assegnata $f'(x)$.

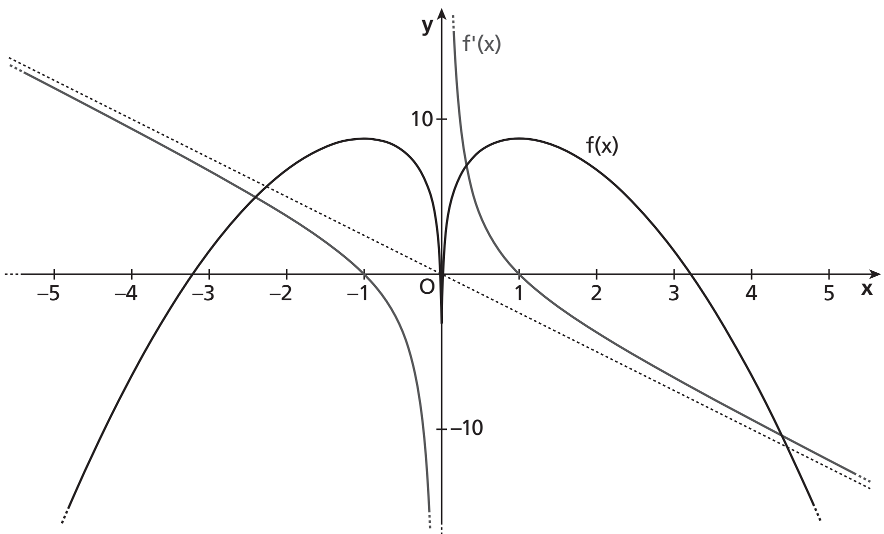


Figura 15

Ricaviamo dal grafico di $f'(x)$ le caratteristiche di $f''(x)$:

- $f'(x)$ e di conseguenza $f''(x)$ non sono definite in $x=0$;
- $f''(x)$ è sempre negativa;
- $f'(x)$ è una funzione dispari, quindi $f''(x)$ è una funzione pari;
- $f'(x)$ ha asintoto verticale $x=0$ con $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$, quindi $f''(x)$, che rappresenta la derivata prima di $f'(x)$ e quindi rappresenta il coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico di $f'(x)$, tende a $-\infty$ per $x\to 0$;
- $f'(x)$ ha andamento asintotico uguale a $y=-\frac{5}{2}x$, quindi la sua derivata prima $f''(x)$, per $x\to\pm\infty$, si comporta come la derivata prima di $y=-\frac{5}{2}x$, che è $y=-\frac{5}{2}$; in conclusione, $f''(x)$ ha asintoto orizzontale $y=-\frac{5}{2}$ per $x\to\pm\infty$.

Tracciamo il grafico plausibile di $f''(x)$.

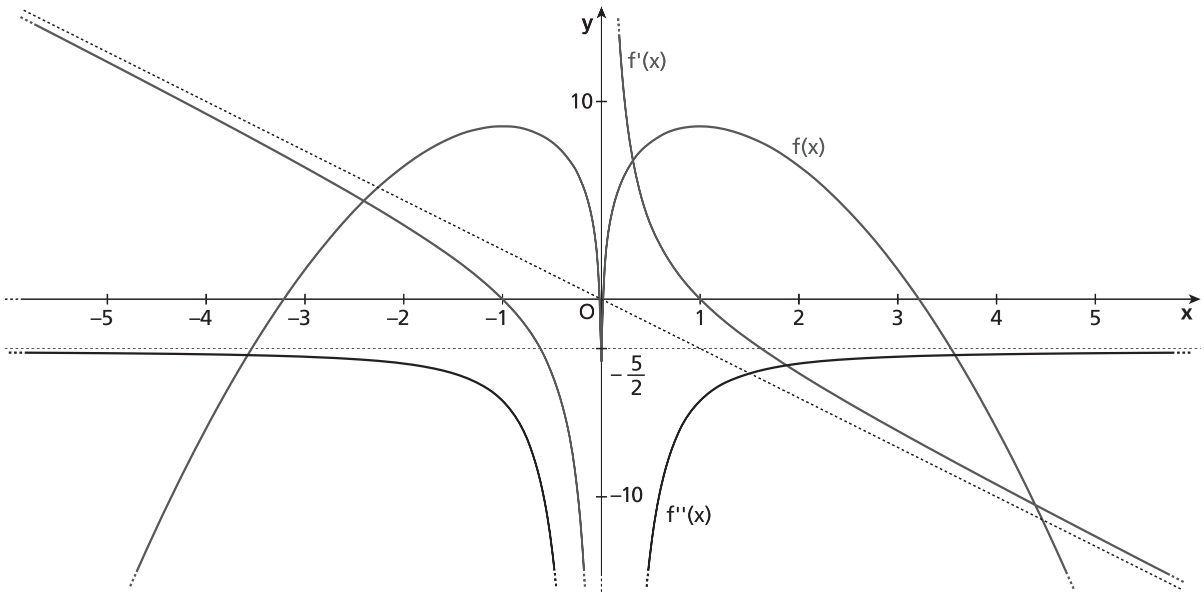


Figura 16

7 I grafici di $f(x) = e^{3-x}$ e di $g(x) = e^{2x}$ si possono tracciare partendo dal grafico di $y = e^x$:

- $f(x) = e^{3-x} = e^3 \cdot e^{-x}$ si ottiene da $y = e^x$ applicando prima la simmetria rispetto all'asse y e poi dilatando lungo l'asse y del fattore $e^3 \simeq 20$;
- $g(x) = e^{2x} = (e^x)^2$ si ottiene elevando al quadrato $y = e^x$.

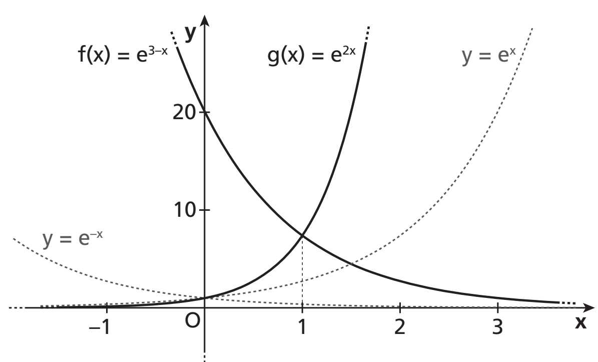


Figura 17

Osserviamo che i due grafici si intersecano per $x = 1$, in quanto $f(1) = g(1) = e^2$, e che hanno entrambi l'asse x come asintoto orizzontale.
Il quesito chiede di determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

Osserviamo che tale regione *non è limitata*, quindi il quesito contiene un errore che può generare il dubbio su quale sia effettivamente la regione da considerare.
Per esempio, volendo privilegiare l'informazione che la regione sia *limitata*, si potrebbe considerare la regione limitata racchiusa dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e dall'asse y (*non* dall'asse x).

Nel dubbio, sviluppiamo entrambi i calcoli.

L'area della regione *illimitata* compresa fra l'asse x e i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$A_x = \int_{-\infty}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^1 e^{2x}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{3-x}dx =$$

$$\lim_{s\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_s^1 2e^{2x}dx\right) + \lim_{t\to+\infty}\left(-\int_1^t -e^{3-x}dx\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to-\infty}[e^{2x}]_s^1 - \lim_{t\to+\infty}[e^{3-x}]_1^t =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to-\infty}(e^2 - e^{2s}) - \lim_{t\to+\infty}(e^{3-t} - e^2) = \frac{1}{2}(e^2 - 0) - (0 - e^2) = \frac{1}{2}e^2 + e^2 = \frac{3}{2}e^2 \simeq 11{,}08.$$

L'area della regione *limitata* racchiusa dall'asse y e dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$A_y = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (e^{3-x} - e^{2x})dx = \left[-e^{3-x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 =$$

$$\left(-e^2 - \frac{1}{2}e^2\right) - \left(-e^3 - \frac{1}{2}e^0\right) = -\frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{1}{2} \simeq 9{,}50.$$

8 Indichiamo con $p = 0{,}8$ la probabilità che il giocatore faccia canestro in un tiro libero.
La distribuzione di probabilità è di tipo bernoulliano, quindi la probabilità che il giocatore faccia esattamente 2 canestri su 3 tiri è:

$$p(X=2) = \binom{3}{2}p^2(1-p)^{3-2} = 3\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2 = 0{,}384 \to 38{,}4\%.$$

Un evento E la cui probabilità sia esprimibile con la formula:

$$p(E) = \binom{50}{40}\cdot 0{,}8^{40}\cdot 0{,}2^{10} = \binom{50}{40}\cdot p^{40}\cdot(1-p)^{50-40}$$

è quello di fare esattamente 40 canestri su 50 tiri liberi.

9 **a.** In un sistema di riferimento $Oxyz$ consideriamo i punti di coordinate:

$A(4;14;17)$, $B(16;11;14)$, $C(16;2;23)$.

Calcoliamo la lunghezza dei tre lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-16)^2 + (14-11)^2 + (17-14)^2} = \sqrt{144+9+9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2};$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-16)^2 + (14-2)^2 + (17-23)^2} = \sqrt{144+144+36} = \sqrt{324} = 18;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(16-16)^2 + (11-2)^2 + (14-23)^2} = \sqrt{0+81+81} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}.$$

Il triangolo ABC è quindi isoscele, perché ha i due lati AB e BC congruenti.
Poiché vale la relazione:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

in quanto $324 = 162 + 162$, il triangolo è anche rettangolo, con ipotenusa AC.

b. Il quadrato è l'unico quadrilatero in cui le diagonali sono perpendicolari, congruenti e si intersecano nel loro punto medio. Quindi il punto di coordinate generiche $D(x;y;z)$ è il vertice di un quadrato $ABCD$ se risulta simmetrico di B rispetto alla retta AC.

Deve allora essere:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \quad \to \quad x_D = 2x_M - x_B;$$

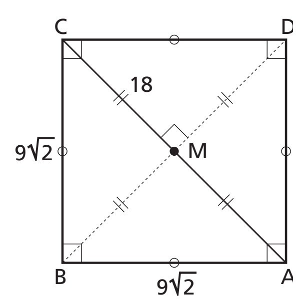


Figura 18

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \quad \rightarrow \quad y_D = 2y_M - y_B;$$

$$z_M = \frac{z_B + z_D}{2} \quad \rightarrow \quad z_D = 2z_M - z_B;$$

Le coordinate di M sono:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+16}{2} = 10; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{14+2}{2} = 8; \quad z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{17+23}{2} = 20.$$

Possiamo infine ricavare le coordinate di D:

$$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 10 - 16 = 4;$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 8 - 11 = 5;$$

$$z_D = 2z_M - z_B = 2 \cdot 20 - 14 = 26.$$

Il punto D ha coordinate $D(4; 5; 26)$.

10 Nel sistema di riferimento $Oxyz$ consideriamo il punto $P(1; 2; -1)$ e il piano di equazione $\alpha: x - 2y + z + 4 = 0$.

a. Per stabilire se il punto giace sul piano, sostituiamo le coordinate di P nell'equazione del piano:

$$(1) - 2 \cdot (2) + (-1) + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 4 - 1 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi $P \in \alpha$.

b. Se Σ è una superficie sferica di raggio 6 tangente ad α in P, allora il centro C di Σ individua una retta CP perpendicolare al piano α e CP è lungo 6.
Il vettore di direzione $\vec{r}$ delle rette perpendicolari ad α è costituito dai coefficienti delle incognite di α, quindi:

$$\vec{r}(1; -2; 1).$$

La retta r passante per P e perpendicolare ad α ha equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

Determiniamo i punti C di r che distano 6 da P:

$$\overline{CP} = 6 \quad \rightarrow \quad \overline{CP}^2 = 36 \quad \rightarrow$$

$$(1 + t - 1)^2 + (2 - 2t - 2)^2 + (-1 + t + 1)^2 = 36 \quad \rightarrow$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = 36 \quad \rightarrow \quad 6t^2 = 36 \quad \rightarrow \quad t^2 = 6 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{6}.$$

Otteniamo due punti:

$$C_1(1 - \sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}; -1 - \sqrt{6}); \qquad C_2(1 + \sqrt{6}; 2 - 2\sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}).$$

La superficie sferica Σ_1 di centro C_1 e raggio 6, che risulta tangente ad α in P, ha equazione:

$$(x - 1 + \sqrt{6})^2 + (y - 2 - 2\sqrt{6})^2 + (z + 1 + \sqrt{6})^2 = 36.$$

La superficie sferica Σ_2 di centro C_2 e raggio 6, che risulta sempre tangente ad α in P, ha equazione:

$$(x - 1 - \sqrt{6})^2 + (y - 2 + 2\sqrt{6})^2 + (z + 1 - \sqrt{6})^2 = 36.$$