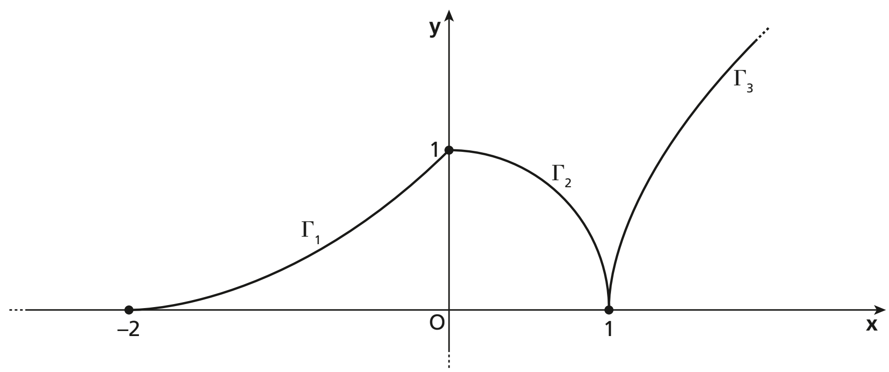
Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).

PROBLEMA 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



■ **Figura 1**

a. Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$ utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2, \quad x^2 + y^2 + b = 0, \quad x^2 - y^2 + c = 0,$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c.
Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

b. A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

c. Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intrevallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d. Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

PROBLEMA 2

Fissato un parametro reale a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_α.

a. Al variare del parametro a, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b. Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_α intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c. Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d. Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

QUESTIONARIO

1 Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotesa, dalla parte opposta al vertice A.
Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

2 Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:

- un numero primo;
- un numero almeno pari a 3;
- un numero al più pari a 3.

3 Considerata la retta r passante per i due punti $A(1; -2; 0)$ e $B(2; 3; -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1; -6; 7)$ e tangente a r.

4 Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

5 Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando duemetodi diversi.

6 Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1.$$

7 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se} < 0 \\ ax + b & \text{se} \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

8 Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

SOLUZIONE • SESSIONE ORDINARIA 2023

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

PROBLEMA 1

a. La prima equazione, $y = a(x+2)^2$, rappresenta una parabola di vertice $(-2; 0)$. Possiamo determinare il valore del parametro a imponendo il passaggio per il punto $(0; 1)$:

$$1 = a(0+2)^2 \rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

L'equazione dell'arco Γ_1 è quindi $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$.
La seconda equazione rappresenta una circonferenza di centro $(0; 0)$ e raggio $r = \sqrt{-b}$, con $b < 0$.

Determiniamo b imponendo che sia $r = 1$:

$$\sqrt{-b} = 1 \rightarrow b = -1.$$

Per determinare l'equazione dell'arco Γ_2 esplicitiamo y sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1$:

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

La terza equazione, $x^2 - y^2 + c = 0$, per $c \neq 0$ rappresenta un'iperbole equilatera, centrata, con i fuochi sull'asse x se $c < 0$ e sull'asse y se $c > 0$, e con i vertici in $(\pm\sqrt{-c}; 0)$ se $c < 0$ e $(0; \pm\sqrt{c})$ se $c > 0$.
Poiché Γ_3 è un'arco di iperbole con un vertice in $(1; 0)$, deve essere $\sqrt{-c} = 1 \rightarrow c = -1$.

Esplicitando rispetto a y, sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 1 \leq x \leq 2$, l'equazione si scrive $y = \sqrt{x^2-1}$.

L'espressione analitica di f risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

La funzione definita a tratti $f(x)$ è definita e continua in $[-2; 2]$. Calcoliamo la sua derivata $f'(x)$ osservando subito che $f(x)$ è derivabile nei punti interni di ciascun tratto.

Per $-2 < x < 0$, $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]-2; 0[$.

Per $0 < x < 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]0; 1[$.

Per $1 < x < 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]1; 2[$.

Per quanto riguarda la derivabilità nei punti estremi dell'intervallo $[-2; 2]$, osserviamo inoltre che esiste la derivata destra in $x = -2$, che vale $f'_+(-2) = \frac{1}{2}(-2+2) = 0$, ed esiste la derivata sinistra in $x = 2$, che vale $f'_-(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Analizziamo ora la derivabilità in $x = 0$ e $x = 1$: dal grafico è già evidente che in questi punti la funzione non è derivabile.

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La funzione non è derivabile in $x = 0$, perché la derivata sinistra e destra sono finite, ma diverse. Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Nel punto $(0; 1)$ la funzione non ammette quindi una tangente, ma possiamo scrivere le equazioni della tangente sinistra e destra:

tangente sinistra: $m = f'_-(0) = 1 \rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \rightarrow y = x + 1$;

tangente destra: $m = f'_+(0) = 0 \rightarrow y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$.

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x = 1$:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

La funzione $y = f(x)$ non è quindi derivabile in $x = 1$, dove il grafico ha una cuspide con tangente verticale di equazione $x = 1$.
La funzione $f(x)$ è quindi derivabile in $[-2; 2] - \{0, 1\}$, con derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & \text{se} -2 \leq x < 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Restano da calcolare le tangenti nei due punti di ascissa -2 e 2. Si ha $f(-2) = 0$ e $f(2) = \sqrt{3}$.
Dall'equazione della derivata si ha $f'(-2) = 0$, e quindi la tangente in $(-2; 0)$ ha equazione $y = 0$.

Analogamente, abbiamo $f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

La tangente in $(2; \sqrt{3})$ ha equazione

$$y - \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(x-2) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b. Dallo studio di funzione che abbiamo svolto nella Parte **a**, il dominio di $f'(x)$ risulta $[-2; 2] - \{0, 1\}$. Abbiamo inoltre ricavato le seguenti proprietà:

$$f'(-2) = 0; \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1; \quad \lim_{x \to 0^+} = f'(x) = 0;$$

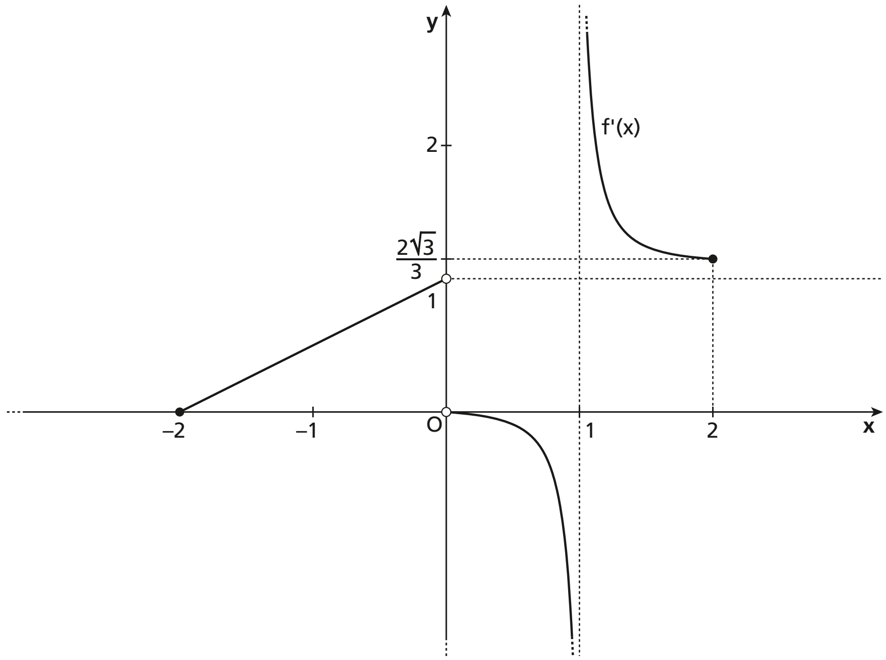
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty; \quad f'(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1,15.$$

- Nel tratto $-2 < x < 0$, $y = f(x)$ è monotòna crescente e convessa, quindi $f'(x)$ è positiva e crescente.

  In particolare, $y = f'(x)$ è un segmento di retta perché derivata di un polinomio di secondo grado.

- Nel tratto $0 < x < 1$, $y = f(x)$ è monotòna decrescente e concava, quindi $f'(x)$ è negativa e decrescente.
- Nel tratto $1 < x \leq 2$, $y = f(x)$ è monotòna crescente e concava, quindi $y = f'(x)$ è positiva e decrescente.

Il grafico di $f'(x)$ è raffigurato a seguire.



■ **Figura 2**

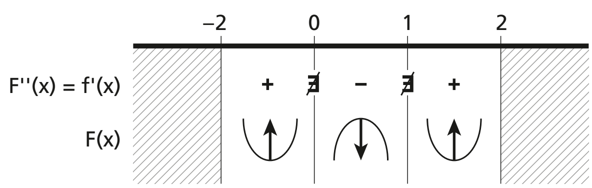
Analizziamo la concavità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

Poiché $f(x)$ è continua su $[-2; 2]$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$ in $[-2; 2]$.

Poiché $f(x)$ è derivabile in $[-2; 2] - \{0; 1\}$, vale anche $F''(x) = f'$ in $[-2; 2] - \{0, 1\}$.

Dal grafico ottenuto nella Parte **b**, possiamo analizzare il segno di $F''(x)$:

$F(x)$ è convessa per $-2 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 2$; è concava per $0 < x < 1$.



■ **Figura 3**

Poiché $F(x)$ è continua in $x = 0$ e $x = 1$ e la funzione cambia concavità, questi sono punti di flesso.

c. Dal grafico della funzione $f(x)$ si osserva che

$$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2, \quad g: [-2; 0] \rightarrow [0; 1]$$

è iniettiva (in quanto monotòna crescente) e suriettiva, e quindi invertibile.
Ricaviamo l'espressione analitica dell'inversa esplicitando x:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 4y = (x+2)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 = \pm\sqrt{4y} \end{cases} \rightarrow \ x = -2 + \sqrt{4y}.$$

Esprimendo la variabile indipendente con x; otteniamo:

$$h(x) = -2 + 2\sqrt{x}, \quad h\,[0;1] \to [-2;0].$$

La funzione $y = h(x)$ è derivabile in $]0;1]$ in quanto $y = g(x)$ è derivabile in $]-2;0]$, con $y'(x) \neq 0$.

Per il teorema della derivata della funzione inversa, risulta:

$$h'_+(0) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{g'(x)} = +\infty,$$

quindi h non è derivabile in 0.

Il grafico di $h(x)$, in quanto funzione inversa di $g(x)$, è il simmetrico di Γ_1 rispetto alla bisettrice degli assi cartesiani; come in figura.

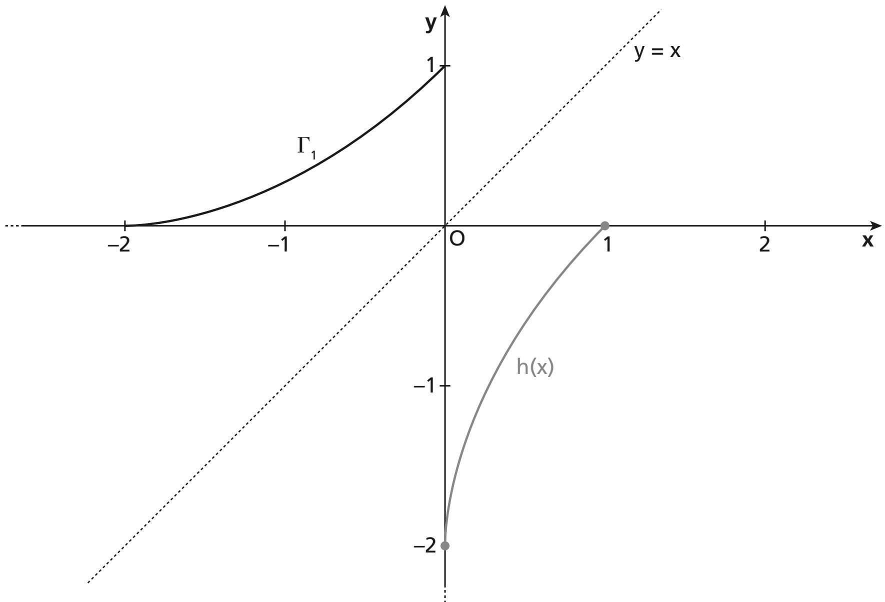


Figura 4

d. Poiché la funzione è positiva su tutto l'intervallo, possiamo calcolare l'area con l'integrale.
Calcoliamo l'area di S:

$$A_S = \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}.$$

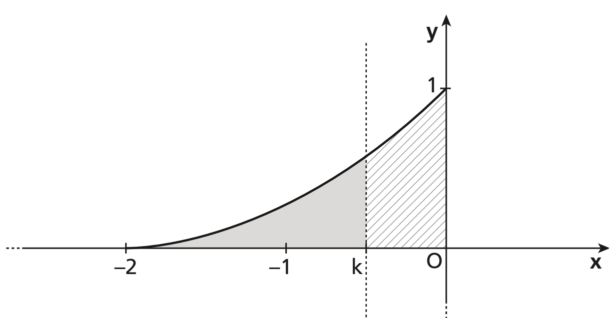


Figura 5

Cerchiamo il valore di k per cui

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo:

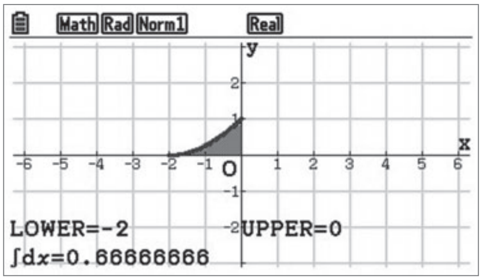
$$\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(x+2)^2dx=\frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{k}=\frac{1}{4}\frac{(k+2)^3}{3}\ \to$$

$$\frac{1}{4}\frac{(k+2)^3}{3}=\frac{1}{3}\ \to\ (k+2)^3=4\ \to\ k=-2+\sqrt[3]{4}.$$

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per disegnare il grafico Γ_1 e calcolare l'area di S.
Per prima cosa inseriamo la definizione della funzione specificando l'intervallo di definizione con la notazione $Y1=\frac{1}{4}(x+2)^2$, $[-2;0]$.

Dopo aver visualizzato la funzione con il comando *F6* (*DRAW*), usiamo il tasto *F5* (*G-SOLV*) e scorriamo la lista dei comandi con *F6* per poi selezionare il comando *F3* $\left(\int dx\right)$ e ancora *F1* $\left(\int dx\right)$. A questo punto con il cursore selezioniamo rispettivamente gli estremi dell'intervallo $x=-2$ e $x=0$. Otteniamo così l'area di S.



PROBLEMA 2

a. Posto $a \neq 0$, il dominio della funzione razionale fratta

$$f_a(x)=\frac{x^2-ax}{x^2-a}$$

è determinato dai valori di x che non annullano il denominatore.

Se $a<0$, il denominatore non si annulla per alcun valore di x; il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e la funzione non presenta punti di singolarità o discontinuità.

Se $a>0$, otteniamo:

$$x^2-a\neq 0\ \to\ x^2\neq a\ \to\ x\neq\pm\sqrt{a},$$

il dominio della funzione è $\mathbb{R}-\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}$.

Nell'ipotesi $a>0$, dunque, abbiamo due punti di singolarità $x=-\sqrt{a}$ e $x=\sqrt{a}$; classifichiamoli calcolando i limiti per x che tende a tali punti.

Iniziamo calcolando il limite per $x\to(-\sqrt{a})^-$.

$$\lim_{x\to(-\sqrt{a})^-}\frac{x^2-ax}{x^2-a}=\lim_{x\to(-\sqrt{a})^-}\frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}.$$

- Il fattore x tende a $-\sqrt{a}<0$.
- Il fattore $(x-a)$ tende a $-\sqrt{a}-a<0$.
- Il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a $-2\sqrt{a}<0$.
- Il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a 0^-.

Il limite è dunque $+\infty$.

Ragioniamo in modo simile per $x\to(-\sqrt{a})^+$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{a})^+}\frac{x^2-ax}{x^2-a}=\lim_{x\to(-\sqrt{a})^+}\frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}.$$

- Il fattore x tende a $-\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore $(x-a)$ tende a $-\sqrt{a} - a < 0$.
- Il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a $-2\sqrt{a} < 0$.
- Il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a 0^+.

Il limite è dunque $-\infty$.

I due limiti sono infiniti con segno diverso, quindi $x = -\sqrt{a}$ è un punto di singolarità di II specie (per $a > 0$).

Vediamo ora il limite per $x \to (\sqrt{a})^-$.

$$\lim_{x \to (\sqrt{a})^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x \to (\sqrt{a})^-} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

Distinguiamo i casi $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = 1$.

Se $0 < a < 1$ allora $\sqrt{a} > a$ e otteniamo che:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x-a)$ tende a $\sqrt{a} - a > 0$;
- il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a 0^-;
- il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $-\infty$.

Se $a > 1$ allora $\sqrt{a} < a$ e otteniamo che:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x-a)$ tende a $\sqrt{a} - a < 0$;
- il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a 0^-;
- il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $+\infty$.

Se $a = 1$, il limite diventa

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Passiamo al limite per $x \to (\sqrt{a})^+$.

$$\lim_{x \to (\sqrt{a})^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x \to (\sqrt{a})^+} \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}.$$

Distinguiamo ancora i casi $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = 1$.

Se $0 < a < 1$ allora $\sqrt{a} > a$ e otteniamo:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x-a)$ tende a $\sqrt{a} - a > 0$;
- il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a 0^+;
- il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $+\infty$.

Se $a > 1$, allora $\sqrt{a} < a$ e otteniamo:

- il fattore x tende a $\sqrt{a} > 0$;
- il fattore $(x-a)$ tende a $\sqrt{a} - a < 0$;
- il fattore $(x-\sqrt{a})$ tende a 0^+;
- il fattore $(x+\sqrt{a})$ tende a $2\sqrt{a} > 0$.

Il limite è dunque $-\infty$.

Se $a = 1$, come prima il limite risulta $\frac{1}{2}$.

Riassumendo:

- se $0 < a < 1$, $\lim_{x \to (\sqrt{a})^-} f_a(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (\sqrt{a})^+} f_a(x) = +\infty$, $x = \sqrt{a}$, è punto di singolarità di II specie;
- se $a > 1$, $\lim_{x \to (\sqrt{a})^-} f_a(x) = +\infty$, $\lim_{x \to (\sqrt{a})^+} f_a(x) = -\infty$, $x = \sqrt{a}$, è punto di singolarità di II specie;
- se $a = 1$, $\lim_{x \to (\sqrt{a})^-} f_a(x) = \lim_{x \to (\sqrt{a})^+} f_a(x) = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{a}$, è punto di singolarità eliminabile.

Per quanto riguarda gli asintoti verticali, abbiamo dunque ricavato che:

- $x = -\sqrt{a}$ è asintoto verticale, da sinistra e da destra, per ogni $a > 0$;
- $x = \sqrt{a}$ è asintoto verticale, da sinistra e da destra, per $0 < a < 1$ e per $a > 1$.

Dal limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1$$

otteniamo che $y = 1$ è asintoto orizzontale per $f_a(x)$ per ogni valore di $a \neq 0$.

b. Poniamo $a \neq 1$ (e ricordiamo che è sempre $a \neq 0$).

Verifichiamo che $f_a(x)$ interseca l'asintoto orizzontale $y = 1$:

$$f_a(a = 1) \to \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} - 1 = 0 \to \frac{x^2 - ax - x^2 + a}{x^2 - a} = a - ax = 0 \to a(1 - x) = 0 \to x = 1.$$

Il valore $x = 1$ è accettabile anche nel caso $a > 0$ e $D_{fa}: x \neq \pm a$ perché $a \neq 1$ per ipotesi.

Il grafico Ω_a interseca quindi l'asintoto orizzontale in (1; 1) per ogni a, $a \neq 0 \wedge a \neq 1$.
Poiché $f_a(0) = 0$, il grafico Ω_a passa effettivamente per l'origine del sistema di riferimento $\forall a \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$. Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico Ω_a nell'origine; calcoliamo la derivata prima di $f_a(x)$ per ricavare il coefficiente angolare della retta tangente:

$$f_a'(x) = \frac{(2x - a)(x^2 - a) - (x^2 - ax)(2x)}{(x^2 - a)^2} = \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2}$$

da cui:

$$f_a'(x) = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}.$$

Il dominio di $f_a'(x)$ è:

- $\mathbb{R}$ se $a < 0$,
- $\mathbb{R} - \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ se $a > 0$.

Poiché $f_a'(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1$, la retta tangente al grafico di Ω_a nell'origine ha sempre coefficiente angolare 1 e dunque l'equazione di tale retta tangente, per ogni a diverso da 0 e 1, è: $y = x$.

c. Consideriamo $a < 1$ (e sempre $a \neq 0$).

Il denominatore di $f_a'(x)$ è sempre positivo sul dominio f_a', quindi il segno della derivata prima è determinato dal segno del numeratore:

$$f_a'(a) > 0 \to a(x^2 - 2x + a) > 0.$$

Per quanto riguarda l'equazione associata, poiché $\Delta = 4(1-a) > 0$, troviamo:

$$x^2 - 2x + a = 0 \ \rightarrow \ x = 1 \pm \sqrt{1-a}$$

e quindi:

$$x^2 - 2x + a > 0 \ \rightarrow \ x < 1 - \sqrt{1-a} \vee x > 1 + \sqrt{1-a},$$

$$x^2 - 2x + a < 0 \ \rightarrow \ 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}.$$

Consideriamo anche il fattore a e distinguiamo due casi. Se $a < 0$,

$$f_a'(x) > 0 \ \rightarrow \ a(x^2 - 2x + a) > 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + a < 0 \ \rightarrow \ 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a};$$

$$f_a'(x) < 0 \ \rightarrow \ a(x^2 - 2x + a) < 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + a > 0 \ \rightarrow \ x < 1 - \sqrt{1-a} \vee x > 1 + \sqrt{1-a}.$$

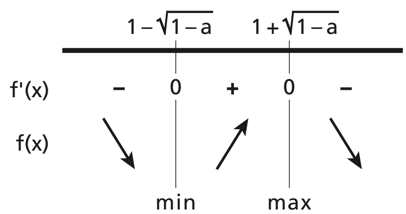


Figura 6

Se $0 < a < 1$,

$$f_a'(x) > 0 \ \rightarrow \ a(x^2 - 2x + a) > 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + a > 0 \ \rightarrow \ x < 1 - \sqrt{1-a} \vee x > 1 + \sqrt{1-a};$$

$$f_a'(x) < 0 \ \rightarrow \ a(x^2 - 2x + a) < 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + a < 0 \ \rightarrow \ 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}.$$

In questo caso dobbiamo considerare che la funzione non è definita in $x = \pm\sqrt{a}$. Per determinare gli intervalli di monotonia dobbiamo ordinare i valori di $\pm\sqrt{a}$ e $1 \pm \sqrt{1-a}$. Abbiamo:

$-1 < -\sqrt{a} < 0;$

$0 < \sqrt{a} < 1;$

$0 < 1 - \sqrt{1-a} < 1$, quindi $-\sqrt{a} < 1 - \sqrt{1-a}$;

$1 < +\sqrt{1-a} < 2$, quindi $\sqrt{a} < 1 + \sqrt{1-a}$.

Rimane da determinare il maggiore tra $\sqrt{a}$ e $1 - \sqrt{1-a}$. Mostriamo che $\sqrt{a} > 1 - \sqrt{1-a}$:

$\sqrt{a} + \sqrt{1-a} > 1$

$(\sqrt{a} + \sqrt{1-a})^2 < 1^2$

$a + 2\sqrt{a(1-a)} + 1 - a > 1$

$2\sqrt{a(1-a)} > 0$ $\qquad\qquad$ vera $\forall a \in \,]0;1[$.

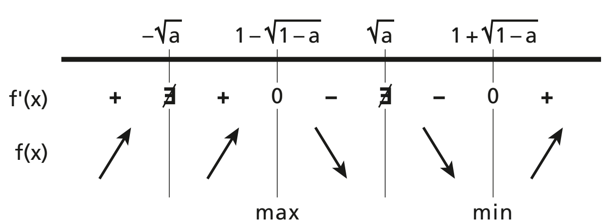


Figura 7

In particolare, se consideriamo $a=-1$, otteniamo la funzione

$$f(x)=f_{-1}(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}.$$

Studiamo la funzione $f(x)$, avvalendoci anche dei risultati già ottenuti.
Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione non è pari né dispari, infatti

$$f(-x)=\frac{x^2-x}{x^2+1}$$

e quindi $f(-x)\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)$.

Troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; x^2+x=0 \;\rightarrow\; x(x+1)=0 \;\rightarrow\; x=0 \vee x=-1.$$

Determiniamo ora il segno della funzione. Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi il segno è individuato dal denominatore:

$$f(x)>0 \;\rightarrow\; x^2-x>0 \;\rightarrow\; x<-1 \vee x>0.$$

Il grafico presenta l'asintoto orizzontale $y=1$, che interseca in $(1;\,1)$.

Studiamo ora la monotonia della funzione: la funzione è crescente per $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$, decrescente per $x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$. Abbiamo quindi un punto di minimo relativo in $x=1-\sqrt{2}\simeq -0{,}41$, di ordinata $f(1-\sqrt{2})=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\simeq -0{,}2$.
Analogamente, abbiamo un punto di massimo relativo in $x=1+\sqrt{2}\simeq 2{,}41$, di ordinata $f(1+\sqrt{2})\simeq 1{,}2$.

La funzione ammette tangente obliqua di equazione $y=x$ nell'origine.

Procediamo a calcolare la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x)=-\frac{(2x-2)(x^2+1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=$$

$$-\frac{2(x^2+1)[(x-1)(x^2+1)-2x(x^2-2x-1)]}{(x^2+1)^4}=$$

$$-\frac{2[(x-1)(x^2+1)-2x(x^2-2x-1)]}{(x^2+1)^3}=$$

$$-\frac{2}{(x^2+1)^3}(x^3+x-x^2-1-2x^3+4x^2+2x)=$$

$$-\frac{2}{(x^2+1)^3}(-x^3+3x^2+3x-1)=\frac{2}{(x^2+1)^3}(x^2-4x+1)(x+1).$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo fattorizzato il polinomio di terzo grado con Ruffini.

	1	–3	–3	1
–1		–1	4	–1
	1	–4	1	0

■ **Figura 8**

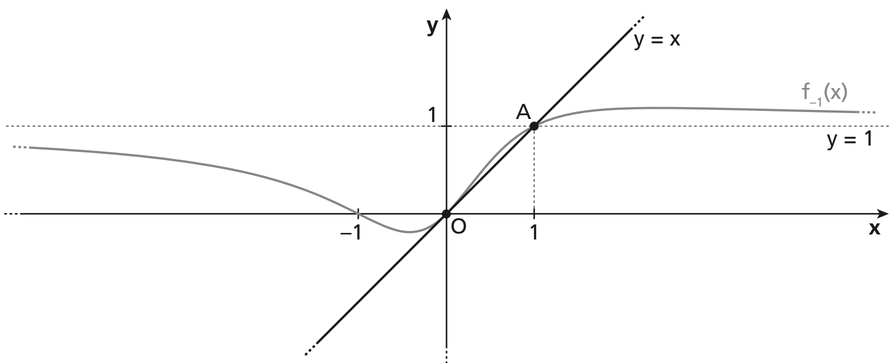
Quindi, la derivata seconda si annulla in $x_1 = -1$ e nelle radici di $x^2 - 4x + 1$, cioè in $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.
Studiamo il segno della derivata seconda con il quadro dei segni.

		-1		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
x + 1	–	0	+		+		+
x² – 4x + 1	+		+	0	–	0	+
f''	–	0	+	0	–	0	+
f							

■ **Figura 9**

La funzione rivolge la concavità verso l'alto in $-1 < x < 2 - \sqrt{3}$ e in $x > 2 + \sqrt{3}$, mentre rivolge la concavità verso il basso in $x < -1$ e in $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$. La funzione presenta tre flessi in $x_1 = -1$ e in $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$.

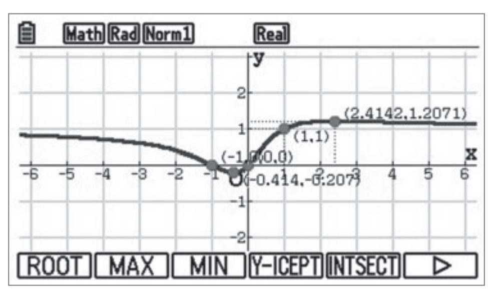
Tracciamo un grafico probabile di $f(x)$.



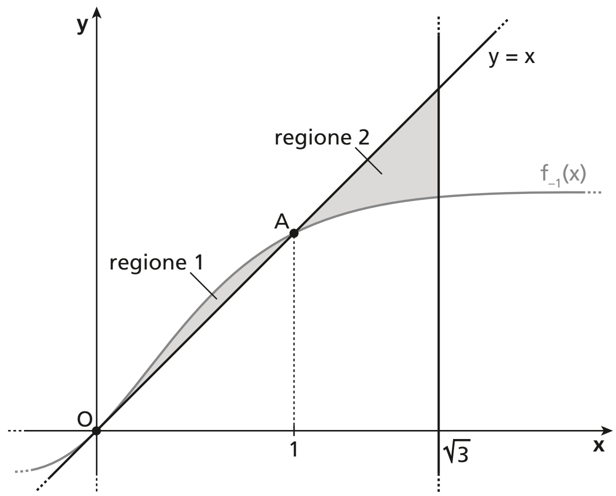
■ **Figura 10**

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per disegnare il grafico Ω_{-1} e studiare la funzione $f_{-1}(x)$.
Per prima cosa inseriamo la definizione della funzione $Y1 = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$.
Dopo aver visualizzato la funzione con il comando *F6* (*DRAW*), possiamo norare che il dominio è tutto $\mathbb{R}$ e che la funzione non è né pari né dispari.
Calcoliamo le intersezioni con l'asse x con il comando *F5* (*G-SOLV*) seguito dal comando *F1* (*ROOT*) e determiniamo visivamente il segno.
Calcoliamo le intersezioni del grafico con l'asintoto orizzontale $y = 1$ con il comando *F5* (*G-SOLV*) seguito dal comando *F6* e poi *F2* (*X-CAL*).
Usiamo i comandi *F5* (*G-SOLV*) e poi *F3* (*MIN*) per trovare il punto di minimo relativo.
Analogamente con i comandi *F5* (*G-SOLV*) e *F2* (*MAX*) troviamo il punto di massimo relativo.



d. Rappresentiamo più in dettaglio la parte di grafico compresa fra $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$.



■ **Figura 11**

Per quanto riguarda la regione di cui occorre calcolare l'area, la richiesta dell'esercizio si presta a due interpretazioni: o la regione richiesta è costituita dalla sola regione 2 in figura, oppure dall'unione delle due regioni 1 e 2. Calcoliamo nel seguito l'area di entrambe le regioni e, nel caso della seconda interpretazione, la somma delle due aree.
Per $0 < x < 1$ la funzione $f(x)$ sta al di sopra della retta tangente $y = x$, per $x > 1$ la funzione sta al di sotto della retta tangente. Verifichiamolo per via analitica, risolvendo la disequazione:

$$f(x) > x \ \rightarrow \ \frac{x^2+x}{x^2+1} > x \ \rightarrow \ \frac{x^2+x-x^3-x}{x^2+1} > 0 \ \rightarrow \ -x^3+x^2 > 0 \ \rightarrow \ x^2(1-x) > 0 \ \rightarrow \ x < 1.$$

L'area racchiusa dal grafico della funzione e dalla retta tangente in $0 < x < 1$ si può calcolare con l'integrale definito:

$$\text{area}_1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x \right) dx = \int_0^1 \frac{-x^3+x^2}{x^2+1} dx.$$

La funzione integranda è una funzione razionale fratta con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Eseguiamo la divisione.

$-x^3$	$+x^2$			x^2+1
x^3		$+x$		$-x+1$
//	x^2	$+x$		
	$-x^2$		-1	
	//	x	-1	

■ **Figura 12**

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{-x^3+x^2}{x^2+1} = (1-x) + \frac{x-1}{x^2+1} = (1-x) - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$$

e l'integrale diventa:

$$\text{area}_1 = \int_0^1 \frac{-x^3+x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [\arctan x]_0^1 + \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 =$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Analogamente, l'area della regione 2, compresa tra la retta tangente e grafico per $1 < x < \sqrt{3}$, è data da:

$$\text{area}_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1}\right)dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3-x^2}{x^2+1}\,dx.$$

Osserviamo che la funzione integranda è l'opposta di quella dell'integrale precedente, quindi:

$$\text{area}_2 = \int_1^{\sqrt{3}} (x-1)\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx =.$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{\sqrt{3}} + [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) =$$

$$2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

(Nell'ultimo passaggio abbiamo trasformato $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$).
Riassumendo:

$$\text{area}_2 = 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}18.$$

$$\text{area}_1 + \text{area}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \simeq 0{,}24.$$

QUESTIONARIO

1 Soluzione sintetica

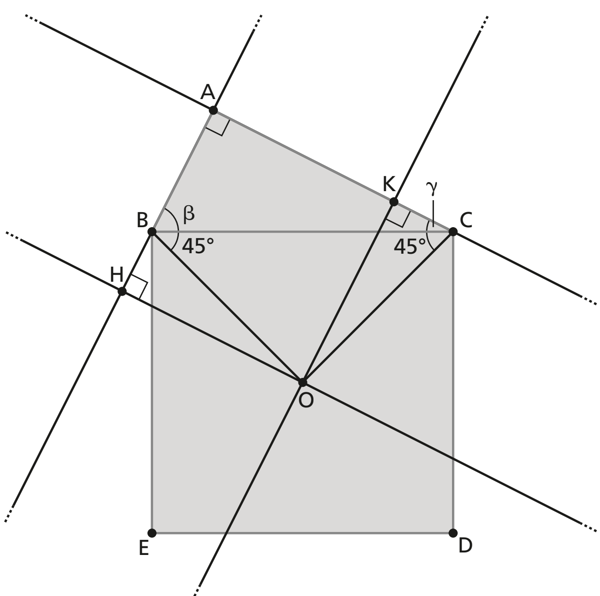


Figura 13

Tracciamo le perpendicolari ad AB e AC passanti per O, e chiamiamo rispettivamente H e K i punti di intersezione. Dimostrare che O è equidistante da AB e da AC equivale a dimostrare che $OH \cong OK$.

Siano inoltre $\gamma = A\widehat{C}B$ e $\beta = A\widehat{B}C = 90° - \gamma$. Consideriamo i triangoli *OHB* e *OKC* e dimostriamo che sono congruenti.

- $OB \cong OC$ perché sono metà delle diagonali *BD* e *CE* del quadrato, che sono congruenti.
- $O\widehat{H}B \cong O\widehat{K}C$ perché angoli retti.
- $O\widehat{C}K \cong O\widehat{B}H$. Infatti, $O\widehat{C}K = \gamma + 45°$ e $O\widehat{B}H = 180° - (\beta + 45°) = 180° - (90° - \gamma + 45°) = \gamma + 45°$.

I triangoli rettangoli *OHB* e *OKC* sono quindi congruenti per il criterio ipotenusa-angolo, e di conseguenza $OH \cong OK$.

Osserviamo che la precedente dimostrazione vale nel caso in cui $\beta \geq \gamma$. Nel caso in cui $\beta < \gamma$, vale $O\widehat{B}H = \beta + 45°$ e $O\widehat{C}K = 180° - (\gamma + 45°) = 180° - (90° - \beta + 45°) = \beta + 45°$.

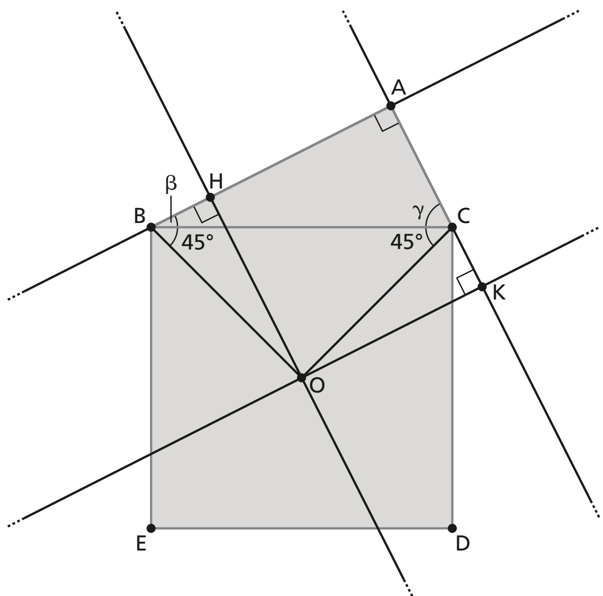


Figura 14

Soluzione analitica

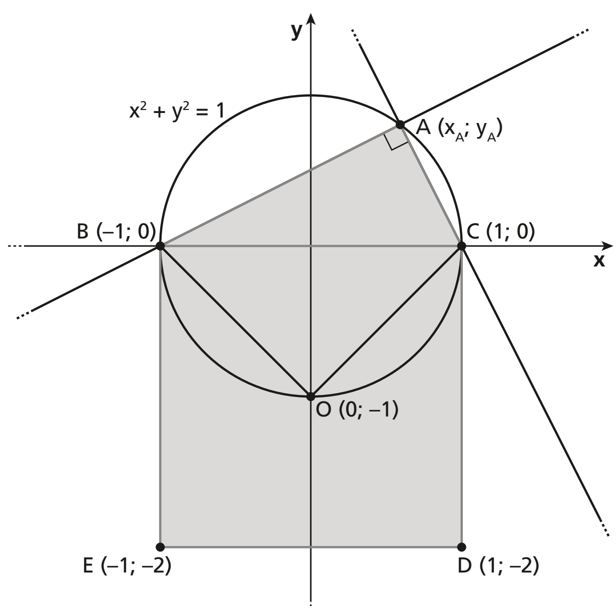


Figura 15

Usando traslazioni, rotazioni e omotetie, possiamo posizionare i vertici B e C nei punti $(-1; 0)$ e $(1; 0)$, e il vertice A nel semipiano $y > 0$. Queste trasformazioni non modificano gli angoli né i rapporti tra le lunghezze, quindi la dimostrazione della tesi ha validità generale.
Osserviamo ora che, visto che $B\widehat{A}C$ è retto, il punto A si trova sulla semicirconferenza di diametro BC nel semipiano $y > 0$. La circonferenza di diametro BC ha centro $O(0; 0)$ e raggio $r = 1$, quindi la sua equazione è $x^2 + y^2 = 1$. Quindi, se $A(x_A; y_A)$, vale $y_A > 0, -1 < x_A < 1$ e $x_A^2 + y_A^2 = 1$.

Troviamo ora le equazioni delle rette AB e AC:

$$AB: \frac{y-0}{y_A-0} = \frac{x+1}{x_A+1} \rightarrow AB: y_A x - (x_A+1)y + y_A = 0;$$

$$AC: \frac{y-0}{y_A-0} = \frac{x-1}{x_A-1} \rightarrow AC: y_A x - (x_A-1)y - y_A = 0.$$

Dobbiamo ora dimostrare che $d(O; AB) = d(O; AC)$; poiché le distanze sono positive, questo equivale a dimostrare che $[d(O; AB)]^2 = [d(O; AC)]^2$.

$$[d(O; AB)]^2 = \left(\frac{|y_A \cdot 0 - (x_A+1)\cdot(-1) + y_A|}{\sqrt{y_A^2 + (x_A+1)^2}}\right)^2 = \frac{(x_A+y_A+1)^2}{y_A^2+(x_A+1)^2} = \frac{x_A^2+y_A^2+1+2x_Ay_A+2x_A+2y_A}{y_A^2+x_A^2+2x_A+1} =$$

$$\frac{2+2x_Ay_A+2x_A+2y_A}{2x_A+2}, \qquad \text{poiché } x_A^2+y_A^2=1$$

$$\frac{2(x_A+1)(y_A+1)}{2(x_A+1)} =$$

$$y_A+1$$

$$[d(O; AC)]^2 = \left(\frac{|y_A \cdot 0 - (x_A-1)\cdot(-1) - y_A|}{\sqrt{y_A^2 + (x_A-1)^2}}\right)^2 = \frac{(x_A-y_A-1)^2}{y_A^2+(x_A-1)^2} = \frac{x_A^2+y_A^2+1-2x_Ay_A-2x_A+2y_A}{y_A^2+x_A^2-2x_A+1} =$$

$$\frac{2-2x_Ay_A-2x_A+2y_A}{-2x_A+2}, \qquad \text{poiché } x_A^2+y_A^2=1$$

$$\frac{2(1-x_A)(y_A+1)}{2(1-x_A)} =$$

$$y_A+1$$

Quindi $[d(O; AB)]^2 = [d(O; AC)]^2$, da cui $d(O; AB) = d(O; AC)$.

2 Sappiamo che ciascuna faccia pari si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari e che gli eventi sono incompatibili.
Indichiamo con p la probabilità di ottenere, in un lancio, una faccia dispari. I numeri dispari sono 1, 3 e 5.
Quindi $2p$ è la probabilità di ottenere una faccia pari. I numeri pari sono 2, 4 e 6.
Poiché la somma delle probabilità dei singoli eventi elementari deve essere pari a 1, si ha:

$$p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1 \rightarrow 9p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{9} \text{ e } 2p = \frac{2}{9}.$$

Se consideriamo gli eventi:

- E_1: «Esce il numero 1»
- E_2: « Esce il numero 2»
- E_3: « Esce il numero 3»
- E_4 « Esce il numero 4»
- E_5: « Esce il numero 5»
- E_6: « Esce il numero 6»

si ha quindi:

$$p(E_1) = p(E_3) = p(E_5) = \frac{1}{9},$$

$$p(E_2) = p(E_4) = p(E_6) = \frac{2}{9}.$$

Per calcolare le probabilità richiesta, applichiamo il teorema della probabilità della somma logica di eventi incompatibili.
Poiché i numeri primi che si possono ottenere in un lancio del dado sono 2, 3 e 5, la probabilità di ottenere un numero primo è:

$$p(E_2 \cup E_3 \cup E_5) = p(E_2) + p(E_3) + p(E_5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

La probabilità di ottenere un numero almeno pari a 3 è:

$$p(E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6) = p(E_3) + p(E_4) + p(E_5) + p(E_6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

La probabilità di ottenere un numero al più pari a 3 è:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

3 Determiniamo l'equazione della retta r, passante per $A(1; -2; 0)$ e $B(2; 3; -1)$ in forma parametrica.
Il vettore $\overrightarrow{AB}$ ha componenti:

$$(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (1; 5; -1).$$

Pertanto, la retta r ha la seguente equazione:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

Poiché la superficie sferica è tangente alla retta r, la lunghezza del suo raggio R sarà pari alla distanza fra il suo centro $C(1; -6; 7)$ e la retta r. Per calcolare la distanza fra C ed r bisogna determinare l'equazione del piano α passante per C e perpendicolare alla retta r. Il piano α ha equazione:

$$\alpha: 1(x-1) + 5(y+6) - 1(z-7) = 0 \ \rightarrow \ \alpha: x + 5y - z + 36 = 0.$$

Determiniamo quindi le coordinate del punto d'intersezione fra il piano α e la retta r, che indichiamo con H:

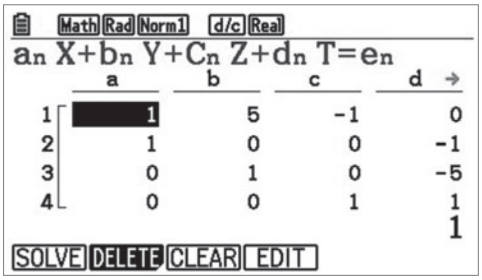
$$H: \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases} \rightarrow \ 1 + t - 10 + 25t + t + 36 = 0 \ \rightarrow \ 27t = -27 \ \rightarrow \ t = -1.$$

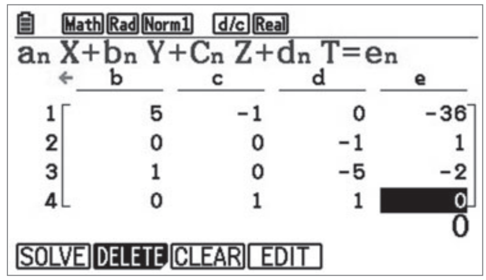
Sostituiamo $t = -1$ nell'equazione della retta e otteniamo le coordinate del punto H:

$$H(0; -7; 1).$$

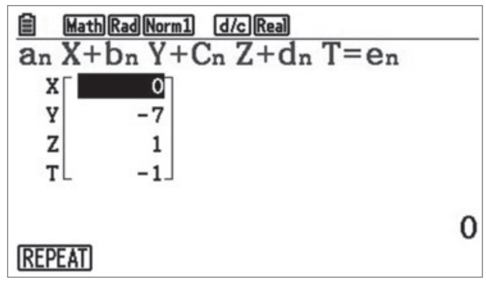
Con la calcolatrice grafica

Per risolvere il sistema lineare usiamo l'ambiente *Equation*. Selezioniamo il tipo con *F1* (*SIMUL*) e poi il numero di incognite con *F3* (*4*). A Questo punto portiamo le equazioni nella forma $ax + bx + cz + dt = e$ e inseriamo nella matrice i coefficienti relativi rispettivamente alle incognite x, y, z, t e i termini noti.





Terminato l'inserimento di tutti i coefficienti, usiamo il comando *F1* (*SOLVE*) e otteniamo il risultato.



Calcoliamo la distanza $\overline{CH}$:

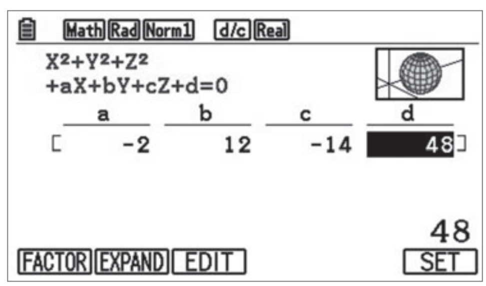
$$\overline{CH} = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2 + (z_C - z_H)^2} = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}.$$

La distanza $\overline{CH}$ coincide con la lunghezza del raggio R della superficie sferica, che avrà dunque equazione:

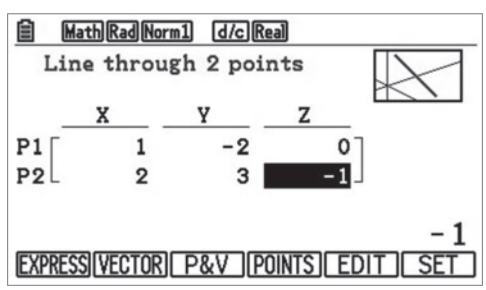
$$(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 38 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0.$$

Con la calcolatrice grafica

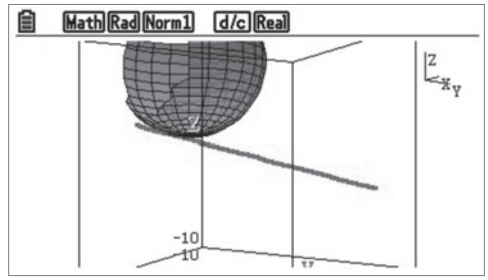
Possiamo verificare graficamente il risultato trovato nell'ambiente *3D Graph*. Disegniamo la sfera tramite il comando *F3* (*TYPE*) e selezionando il template della sfera. Tramite il tasto *F2* (*EXPAND*) impostiamo l'equazione canonica della sfera, inseriamo i coefficienti e confermiamo con *F6* (*SET*).



Per disegnare la retta r, ripetiamo il comando *F3* (*TYPE*) ma selezioniamo il template della linea. Con il tasto *F4* (*POINTS*) comunichiamo la volontà di descrivere la retta tramite due suoi punti, quindi inseriamo le coordinate dei punti A e B e confermiamo con *F6* (*SET*).



A questo punto il comando *F6* (*DRAW*) permette di visualizzare la sfera e la retta e aggiustando l'inquadratura con il comando *F3* (*V-WINDOW*) possiamo vedere il punto di tangenza tra i due oggetti.



4 Indichiamo con $l\,(l > 0)$ il lato della base quadrata del parallelepipedo.

Dalla formula del volume $V = l^2 \cdot h$ ricaviamo l'altezza $h = \frac{V}{l^2}$.

La superficie totale del parallelepipedo è quindi:

$$S_T = 2A_B + 2p \cdot h = 2l^2 + 4lh = 2l^2 + 4l \cdot \frac{V}{l^2} = 2l^2 + \frac{4V}{l}.$$

Deriviamo la funzione $S_T(l)$ e studiamo il segno della derivata per determinare i punti stazionari.

$$S'_T(l) = 4l - \frac{4V}{l^2}.$$

$$S'_T(l) > 0 \;\rightarrow\; 4l - \frac{4V}{l^2} > 0 \;\rightarrow\; \frac{l^3 - V}{l^2} > 0 \;\rightarrow\; l^3 - V > 0 \;\rightarrow\; l > \sqrt[3]{V}.$$

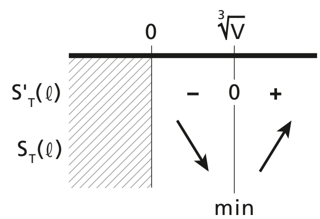


Figura 16

La funzione $S_T(l)$ ha un minimo per $l = \sqrt[3]{V}$.

Calcoliamo ora la diagonale del parallelepipedo considerando il triangolo rettangolo in figura:

$$d(l) = \sqrt{(l\sqrt{2})^2 + h^2} = \sqrt{2l^2 + h^2}.$$

Sostituiamo $h = \frac{V}{l^2}$:

$$d(l) = \sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}.$$

Deriviamo la funzione $d(l)$:

$$d'(l) = \frac{1}{2\sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}} \cdot \left(4l - \frac{4V^2}{l^5}\right).$$

Studiamo il segno della derivata. Il primo fattore è sempre positivo $\forall l > 0$, quindi:

$$d'(l) > 0 \;\rightarrow\; 4l - \frac{4V^2}{l^5} > 0 \;\rightarrow\; 4l^6 - 4V^2 > 0 \;\rightarrow\; l^6 > V^2 \;\rightarrow\; l > \sqrt[3]{V}.$$

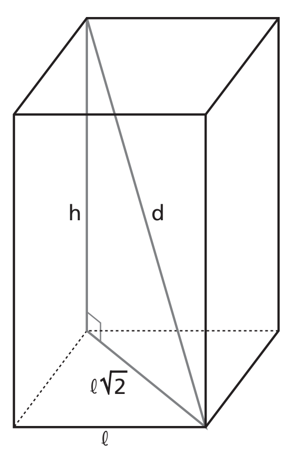


Figura 17

In $l = \sqrt[3]{V}$ la funzione $d(l)$ ha un punto di minimo, come la funzione $S_T(l)$ già analizzata. Ne concludiamo quindi che il parallelepipedo di area totale minima ha anche la diagonale di lunghezza minima ed è il cubo.

5 Proponiamo tre possibili metodi.

Primo metodo

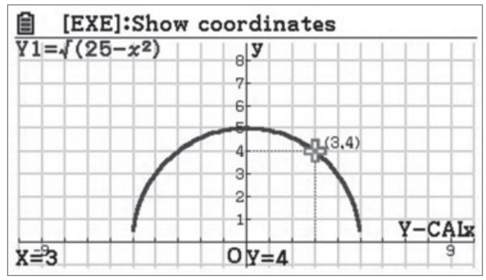
Considerando il significato geometrico della derivata, possiamo scrivere l'equazione della retta tangente in un punto x_0 come:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Calcoliamo $f(x_0) = f(3) = \sqrt{25-9} = 4$.

Con la calcolatrice grafica

Nell'ambiente *Graph* disegniamo il grafico della curva inserendo l'equazione $Y1 = \sqrt{25-x^2}$ e premendo *F6* (*DRAW*). Individuiamo il suo punto di ascissa 3 con il comando *F5* (*G-SOLV*) e scorriamo la lista dei comandi con *F6* per poi selezionare il comando *F1* (*Y-CAL*). Otteniamo così il punto $P(3; 4)$.



Deriviamo la funzione:

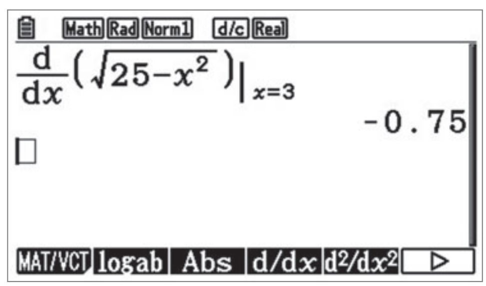
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

e calcoliamo la derivata per $x_0 = 3$:

$$f'(3) = -\frac{3}{4}.$$

Con la calcolatrice grafica

Nell'ambiente *Run-Matrix* possiamo calcolare la derivata di f per $x_0 = 3$. Ricordiamo che l'operatore di derivazione si ottiene tramite il comando *F4* (*MATH*) seguito dal comando *F4* (*d/dx*).



Sostituiamo i valori trovati nell'equazione della retta tangente:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Secondo metodo

Il dominio della funzione $y = \sqrt{25-x^2}$ è $-5 \leq x \leq 5$.
Per la condizione di concordanza del segno, dobbiamo avere $y \geq 0$.
In tale ipotesi, possiamo elevare al quadrato l'equazione $y = \sqrt{25-x^2}$, ottenendo

$$y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = 5$.
Poiché $y \geq 0$, il grafico della funzione risulta la semicirconferenza superiore.

Affinché una generica retta r di equazione $y = mx + q$ sia tangente alla semicirconferenza nel punto di ascissa $x = 3$, la retta dovrà passare per il punto $(3; f(3))$ ed essere perpendicolare al raggio che ha un estremo nel punto di tangenza.
L'ordinata del punto di ascissa 3 è $f(3) = \sqrt{25-9} = 4$.
Il coefficiente angolare del raggio che ha per estremi l'origine e il punto $(3; 4)$ vale

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}.$$

La retta tangente dovrà avere un coefficiente angolare antireciproco, ovvero $-\frac{3}{4}$.
Possiamo pertanto scrivere l'equazione della retta utilizzando la forma

$$y - f(x_0) = m(x - x_0) \rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Terzo metodo
Il dominio della funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$ è $-5 \leq x \leq 5$.
Per la condizione di concordanza del segno, dobbiamo avere $y \geq 0$.
In tale ipotesi, possiamo elevare al quadrato l'equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$, ottenendo

$$y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = 5$.
Poiché $y \geq 0$, il grafico della funzione risulta la semicirconferenza superiore.
Affinché una generica retta r di equazione $y = mx + q$ sia tangente alla semicirconferenza nel punto di ascissa $x = 3$, la retta dovrà passare per il punto $(3; f(3))$ e avere distanza dal centro della circonferenza pari al raggio.
L'ordinata del punto di ascissa 3 è $f(3) = \sqrt{25-9} = 4$.
Imponiamo quindi il passaggio di r per il punto $(3; 4)$:

$$4 = 3m + q \rightarrow q = 4 - 3m.$$

Sostituiamo nell'equazione della retta r:

$$y = mx + 4 - 3m \rightarrow mx - y + 4 - 3m = 0$$

e imponiamo che la distanza dal centro sia uguale al raggio:

$$d(r; 0) = r \rightarrow \frac{|4-3m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \rightarrow |4 - 3m| = 5\sqrt{m^2+1}.$$

Eleviamo al quadrato:

$$16 - 24m + 9m^2 = 25(m^2+1) \rightarrow 16m^2 + 24m + 9 = 0 \rightarrow (4m+3)^2 = 0 \rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

L'equazione della retta cercata è quindi:

$$y = -\frac{3}{4}x + 4 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

6 Proponiamo due metodi alternativi.

Primo metodo

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax^3 - bx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}.$$

Poiché il limite deve convergere a un numero finito, è necessario che il numeratore tenda a zero, altrimenti il limite divergerebbe a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to 0}(\cos x - 3ax^2 - b) = 0 \rightarrow 1 - b = 0 \rightarrow b = 1.$$

Il limite diventa quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2}$$

e si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo quindi il teorema di De L'Hospital due volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1-6a}{6}.$$

Imponendo che il limite valga 1, otteniamo:

$$\frac{-1-6a}{6} = 1 \rightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

Quindi $a = -\frac{7}{6} \wedge b = 1$.

Secondo metodo
Il limite può essere scritto nella forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - ax^3 - bx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3} - a - \frac{b}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left[-a + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right)\right].$$

Per il primo limite notevole, è noto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Se fosse quindi $b \neq 1$, ne deriverebbe che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right) \neq 0$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right)\right]$$

divergerebbe a $\pm\infty$.

Poiché serve che $\lim_{x\to 0}\left[-a + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - b\right)\right]$ converga a un numero finito, occorre quindi $b = 1$.

A questo punto, valutiamo

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\right]$$

Il limite equivale a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che può essere risolta applicando tre volte il teorema di De L'Hospital.
Si ha dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Tornando all'uguaglianza iniziale, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1 \rightarrow \lim_{x\to 0}\left[-a + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\right] - 1 \rightarrow -a - \frac{1}{6} = 1 \rightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

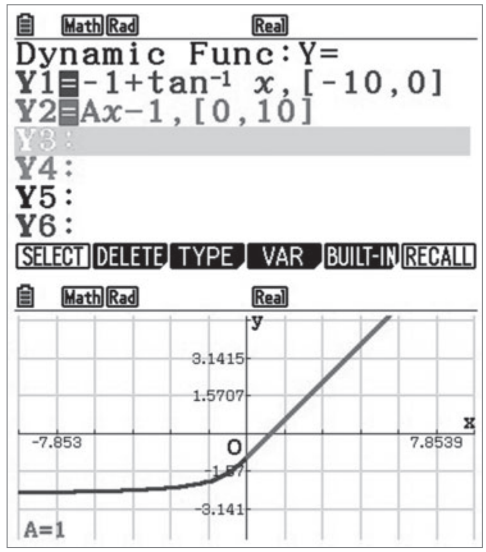
Quindi $a = -\frac{7}{6} \wedge b = 1$.

7 La funzione $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$. L'espressione analitica di ciascun tratto corrisponde a una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, e, in particolare, $f(x)$ è continua e derivabile negli intervalli $]-\infty; 0[$ e $]0; +\infty[$. Dobbiamo quindi determinare per quali valori dei parametri a e b la funzione risulta derivabile anche in $x = 0$. Per farlo possiamo utilizzare il criterio di derivabilità, che necessita però della continuità in $x = 0$. Tale condizione è comunque necessaria, poiché la derivabilità in un punto implica la continuità nello stesso. Affinché $f(x)$ sia continua in $x = 0$ deve valere:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \;\to\; \lim_{x \to 0^-} (-1 + \arctan x) = a \cdot 0 + b \;\to\; -1 + \arctan 0 = b \;\to\; b = -1.$$

Con la calcolatrice grafica

Nell'ambiente *Dyna Graph* possiamo verificare che se $b = -1$, allora la funzione è continua indipendentemente dal valore di a.
Inseriamo separatamente le equazioni che definiscono i due tratti della funzione poi premiamo il tasto *EXE* seguito dal comando *F6* (*DYNA*) per far partire l'animazione. Notiamo che al variare del parametro a, la funzione è sempre continua in $x = 0$.



Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamo:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + x^2} = 1; \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} a = a, a \in \mathbb{R}.$$

Possiamo applicare il criterio di derivabilità.
Se $f'_-(0) = f'_+(0)$, allora la funzione è derivabile in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{x \to 0^+} a \;\to\; 1 = a \;\to\; a = 1.$$

Sostituiamo i valori dei parametri che abbiamo determinato e troviamo l'espressione analitica della funzione $f(x)$ e della sua derivata $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è sempre crescente.
Ricordiamo quali sono le ipotesi che una funzione $g(x)$ deve soddisfare per il teorema di Rolle in un intervallo $[a; b]$ di $\mathbb{R}$. Deve valere che:

- $g(x)$ è continua in $[a; b]$;
- $g(x)$ è derivabile in $]a; b[$;
- $g(a) = g(b)$.

La funzione $f(x)$ soddisfa le prime due ipotesi, ma poiché la funzione è sempre crescente la terza ipotesi non può essere soddisfatta in nessun intervallo $[a; b]$, poiché varrà sempre $f(b) > f(a)$.
Quindi non esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle.

8 La funzione $f_a(x)$ è polinomiale, quindi ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ per qualunque $a > 0$.
Deriviamo la funzione e studiamo il segno della derivata:

$$f_a'(x) = 5x^4 - 5a > 0 \rightarrow x^4 - a > 0.$$

Poiché $a > 0$, possiamo scomporre:

$$(x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a}) > 0.$$

Il fattore $(x^2 + \sqrt{a})$ è sempre positivo $\forall x \in \mathbb{R}$. Poniamo qundi:

$$x^2 - \sqrt{a} \geq 0 \rightarrow x < -\sqrt[4]{a} \vee x > \sqrt[4]{a}.$$

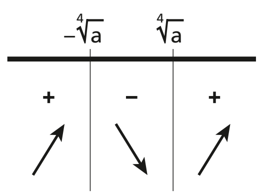


Figura 18

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty.$$

Dalle caratteristiche di monotonia della funzione e dai limiti negli estremi del dominio deduciamo che la funzione può avere al massimo uno zero nell'intervallo $]-\infty; -\sqrt[4]{a}[$, al massimo uno zero nell'intervallo $]-\sqrt[4]{a}; \sqrt[4]{a}[$ e al massimo uno zero nell'intervallo $]\sqrt[4]{a}; +\infty[$.
Affinché esista uno zero nell'intervallo $]-\infty; \sqrt[4]{a}[$, per il teorema di esistenza degli zeri è necessario (e sufficiente) che sia $f(-\sqrt[4]{a}) > 0$. Analogamente, affinché esista uno zero nell'intervallo $]\sqrt[4]{a}; +\infty;[$, per il teorema di esistenza degli zeri è necessario (e sufficiente) che sia $f(\sqrt[4]{a}) < 0$. Queste condizioni assicurano, sempre per il teorema di esistenza degli zeri, che esista uno zero nell'intervallo $]-\sqrt[4]{a}; \sqrt[4]{a}[$.
Quindi la funzione ha tre zeri distinti se e solo se $f(-\sqrt[4]{a}) > 0$ e $f(\sqrt[4]{a}) < 0$.
Il sistema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} f(-\sqrt[4]{a}) > 0 \\ f(\sqrt[4]{a}) < 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} a(-\sqrt[4]{a}) + 5a\sqrt[4]{a} + a > 0 \\ a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo il sistema dividendo per $a > 0$ entrambe le disequazioni:

$$\begin{cases} 4\sqrt[4]{a} + 1 > 0 \\ -4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall a > 0 \\ \sqrt[4]{a} > \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall a > 0 \\ a > \dfrac{1}{256} \end{cases}.$$

La funzione ha tre zeri reali distinti se $a > \dfrac{1}{256}$.

Con la calcolatrice grafica

Possiamo verificare il risultato ottenuto nell'ambiente *Graph*. Inseriamo la definizione di f_a con $\alpha = \dfrac{1}{256}$ e premiamo il comando *F6* (*DRAW*) per visualizzarla. A questo punto usiamo il tasto *F5* (*G-SOLVE*) seguito dal comando *F1* (*ROOT*) per calcolare tutti gli zero distinti della funzione. Osserviamo che in questo caso ci sono solo due zeri distinti come atteso.

Ripetiamo poi gli stessi passaggi per $\alpha = \dfrac{1}{255}$, ovvero un valore leggermente maggiore del precedente. In questo caso osserviamo che gli zeri distinti diventano tre, con due molto vicini.