PROVA D'ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2023

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).

PROBLEMA 1

Assegnata la funzione

$$f(x) = ax\ln(x) - \frac{3}{2}x$$

a. determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b. Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0; -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

c. Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d. Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

PROBLEMA 2

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema. È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$;
- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale;
- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.

a. Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

b. Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}.$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

c. Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

d. Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$. Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}dx$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

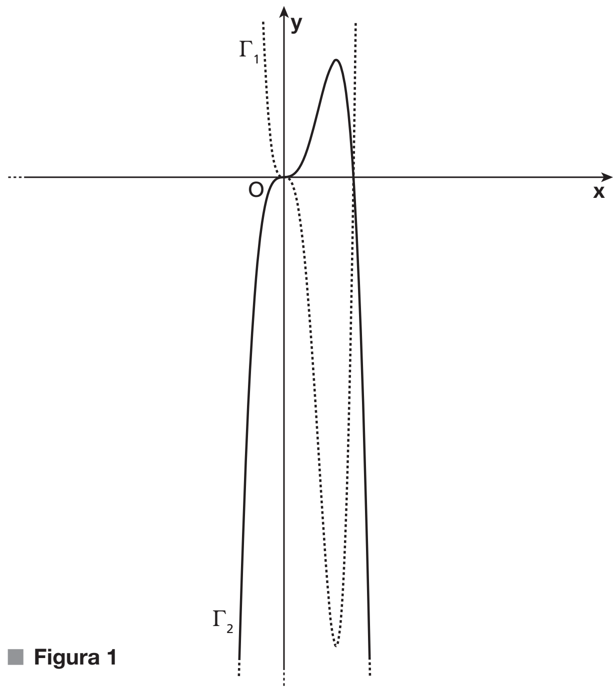


Figura 1

QUESTIONARIO

1 Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento $G'G''$ è parallelo a BC.

2 Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

3 Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1; 2; 3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

4 Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

5 Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

6 Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1; -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

7 Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t}\, dt}{(x-1)^2}$$

8 Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$. Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a; b)$" e B: "$\exists\, x_0 \in (a; b)$ tale che $f'(x_0) = 0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$.

1. $A \Rightarrow B$ **2.** $B \Rightarrow A$ **3.** $A \Leftrightarrow B$ **4.** $B \Leftrightarrow A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

PROBLEMA 1

a. La funzione proposta è definita in $x > 0$ e in questo intervallo è derivabile almeno due volte. Affinché la funzione presenti un punto di minimo relativo in $x = \sqrt{e}$, si devono soddisfare le condizioni

$$f'(\sqrt{e}) = 0 \wedge f''(\sqrt{e}) > 0.$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione:

$$f'(x) = a \cdot \ln(x) + a\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \frac{3}{2} = a \cdot \ln(x) + a - \frac{3}{2},$$

$$f''(x) = a \cdot \frac{1}{x},$$

e poniamo la condizione $f'(\sqrt{e}) = 0$ per l'estremante relativo:

$$a \cdot \ln\sqrt{e} + a - \frac{3}{2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}a + a = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; a = 1.$$

Per $a = 1$, la derivata seconda della funzione assume valore positivo $f''(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, quindi $x = \sqrt{e}$ è un punto di minimo relativo della funzione. Per verificare che il minimo relativo sia anche assoluto, studiamo il segno della derivata prima per $a = 1$:

$$f'(x) = \ln(x) + 1 - \frac{3}{2} = \ln(x) - \frac{1}{2} \quad \text{quindi} \quad f'(x) > 0 \text{ se } \ln(x) > \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x > \sqrt{e}.$$

Analizzando il segno della derivata prima riportato nella tabella dei segni a lato, otteniamo che $x = \sqrt{e}$ è un punto di minimo assoluto perché la funzione a sinistra è decrescente e a destra è crescente per ogni valore del dominio.

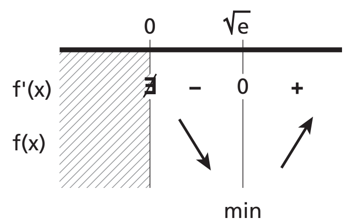


Figura 2

Studiamo la funzione $f(x) = x \cdot \ln(x) - \frac{3}{2}x$ ottenuta per $a = 1$.

La funzione è definita e continua in $x > 0$, non interseca l'asse delle ordinate perché 0 non appartiene al dominio ed è né pari né dispari, perché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine.

Studiamo il segno della funzione in $x > 0$, per cui si può considerare solo il segno del fattore logaritmico:

$$f(x) > 0 \;\rightarrow\; x \cdot \left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) > 0 \;\rightarrow\; \ln(x) > \frac{3}{2} \;\rightarrow\; x > \sqrt{e^3} \;\rightarrow\; x > e\sqrt{e}.$$

La funzione è quindi positiva per $x > e\sqrt{e}$, interseca l'asse delle ascisse in $x = e\sqrt{e}$ ed è negativa in $0 < x < e\sqrt{e}$.

La funzione non ha asintoti verticali, infatti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[x \cdot \left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)\right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x) - \frac{3}{2}}{\frac{1}{x}}$$

e il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo applicare ora il teorema di De L'Hospital poiché il limite soddisfa le ipotesi del teorema, infatti $\lim_{x \to 0^+} \left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, in un intorno destro di 0 e abbiamo che le funzioni sono continue, derivabili e che la derivata del denominatore è non nulla;

quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{D\left[\ln(x)-\frac{3}{2}\right]}{D\left[\frac{1}{x}\right]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Poiché il rapporto delle derivate ha limite, possiamo concludere che

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)\right]=0$, per cui $x=0$ è un punto di singolarità eliminabile.

La funzione non ha asintoti orizzontali perché $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)\right]=+\infty$ e non ammette asintoto obliquo perché $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)=+\infty$.

Inoltre, poiché $f(\sqrt{e})=\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{e}=-\sqrt{e}$, la funzione presenta un minimo assoluto in $(\sqrt{e};-\sqrt{e})$ e ha la concavità rivolta verso l'alto in tutti i punti del dominio in quanto $f''(x)=\frac{1}{x}$ è sempre positiva per $x>0$.
Possiamo ora tracciare il grafico della funzione $f(x)$, come in figura.

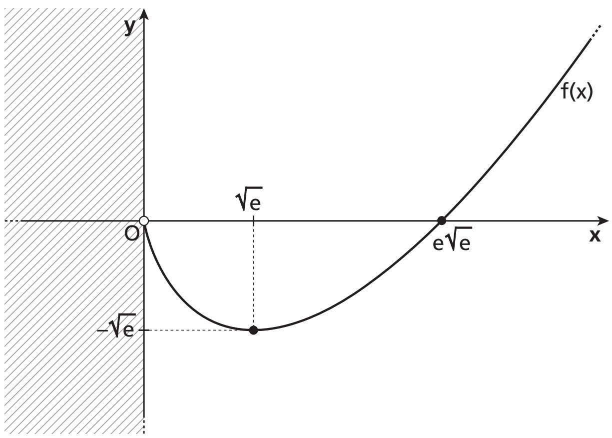


Figura 3

b. Il punto $Q(0;-1)$ non appartiene al grafico della funzione $f(x)$ perché $x=0$ non appartiene al dominio della funzione.

Un generico punto P della curva ha coordinate $\left(c; c\ln c-\frac{3}{2}c\right)$ con $c>0$, e il coefficiente angolare della retta tangente in P alla funzione è $m=f'(c)=\ln c-\frac{1}{2}$. L'equazione della generica retta tangente in P alla curva è quindi:

$$y-c\ln c+\frac{3}{2}c=\left(\ln c-\frac{1}{2}\right)(x-c).$$

Imponiamo il passaggio della retta per $Q(0;-1)$ e troviamo le ascisse c dei punti appartenenti alla curva e che hanno retta tangente passante per Q:

$$-1-c\ln c+\frac{3}{2}c=\left(\ln c-\frac{1}{2}\right)(0-c).$$

L'equazione ha un'unica soluzione per $c=1$. Sostituiamo il valore e otteniamo l'equazione della retta tangente t:

$$y+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)\ \rightarrow\ t\colon y=-\frac{1}{2}x-1.$$

Le coordinate del punto di tangenza si ottengono per $c=1$ e il corrispondente punto è $P\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

c. Le due funzioni risultano tangenti nel loro punto in comune se in $x=1$ entrambe assumono lo stesso valore e se le rette tangenti alle curve hanno lo stesso coefficiente angolare nel punto di ascissa 1.

Chiamiamo $y = l(x) = \dfrac{x+h}{x+k}$ e poniamo quindi le condizioni $\begin{cases} f(1) = l(1) \\ f'(1) = l'(1) \end{cases}$.

Calcoliamo la derivata prima di $y = l(x)$

$$l'(x) = \frac{1 \cdot (x+k) - (x+h) \cdot 1}{(x+k)^2} = \frac{k-h}{(x+k)^2},$$

calcoliamo i valori delle funzioni in $x = 1$

$$f(1) = 1 \cdot \ln 1 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}, \qquad f'(1) = \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$l(1) = \frac{1+h}{1+k}, \qquad l'(1) = \frac{k-h}{(1+k)^2}$$

e sostituiamo nel sistema i valori ottenuti con la condizione di esistenza $k \neq -1$:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2} = \dfrac{1+h}{1+k} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{k-h}{(1+k)^2} \end{cases} \to \begin{cases} -3(1+k) = 2(1+h) \\ h = \dfrac{1}{2}(1+k)^2 + k \end{cases} \to \begin{cases} -3 - 3k = 2 + (1+k)^2 + 2k \\ h = \dfrac{1}{2}(1+k)^2 + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 + 7k + 6 = 0 \ \to \ k = -6 \lor k = -1 \\ h = \dfrac{1}{2}(1+k)^2 + k \end{cases}.$$

Poiché la prima equazione ammette come soluzione accettabile solo $k = -6$, abbiamo $\begin{cases} k = -6 \\ h = \dfrac{13}{2} \end{cases}$.

d. La funzione integrale $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ è definita per ogni valore del dominio della funzione integranda, quindi per $x > 0$. Calcoliamo l'espressione analitica della funzione utilizzando la proprietà di linearità degli integrali:

$$\int \left(t \ln t(t) - \frac{3}{2}t\right) dt = \int t \ln(t)\,dt - \int \frac{3}{2} t\,dt = \int t \ln(t)\,dt - \frac{3}{4}t^2.$$

Integriamo per parti:

$$\int t \ln(t)\,dt = \frac{1}{2}t^2 \ln(t) - \int \frac{1}{2} t^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \frac{1}{2}t^2 \ln(t) - \frac{1}{4}t^2 + c,$$

e otteniamo:

$$\int_1^x \left(t \ln(t) - \frac{3}{2}t\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln(t) - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t^2\right]_1^x = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln(t) - t^2\right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - x^2 + 1.$$

La funzione $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - x^2 + 1$ è definita per $x > 0$.

Studiamo graficamente il segno della funzione $g(x)$:

$$g(x) \geq 0 \to \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - x^2 + 1 \geq 0 \to \ln(x) \geq 2 - \frac{2}{x^2}.$$

Poniamo $p(x) = \ln(x)$ e $t(x) = 2 - \dfrac{2}{x^2}$, la funzione $g(x)$ è positiva negli intervalli in cui $p(x) > t(x)$.
Tracciamo il grafico di $t(x)$ partendo dal grafico di $\dfrac{1}{x^2}$, applicando una simmetria rispetto all'asse delle x, una dilatazione verticale di un fattore 2 e una traslazione di un vettore $(0; 2)$. Tracciamo nello stesso diagramma il grafico di $p(x)$.
Dal grafico decuciamo che:

$$g(x) \geq 0 \to x \leq 1 \lor x \geq \alpha,$$

con $\alpha \simeq 7$.

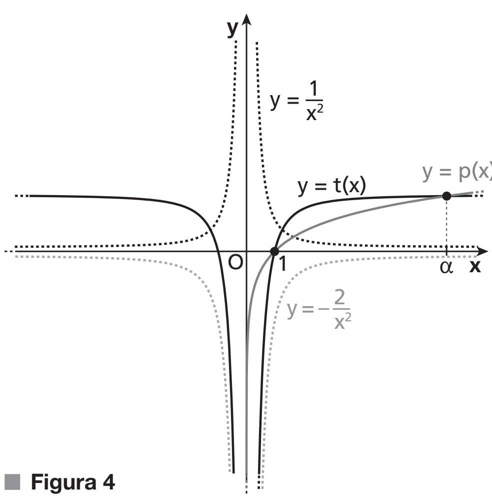


Figura 4

La funzione non presenta asintoti, infatti

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - x^2 + 1\right) = \lim_{x \to 0^+}\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \lim_{x \to 0^+}(-x^2+1).$$

Il limite $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right) = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$ per gerarchia degli infiniti, quindi

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - x^2 + 1\right) = 1,$$

per cui $x = 0$ è un punto di singolarità eliminabile.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, osserviamo che nel dominio delle funzioni $g'(x) = f(x)$, per cui lo studio del segno della derivata prima per la ricerca dei massimi e dei minimi di g coincide con lo studio del segno della funzione $f(x)$.

Poiché $g(\sqrt{e^3}) = \frac{1}{2}e^3 \cdot \frac{3}{2} - e^3 + 1 = 1 - \frac{1}{4}e^3$, la funzione g ammette un minimo assoluto in $\left(\sqrt{e^3}; 1 - \frac{1}{4}e^3\right)$.

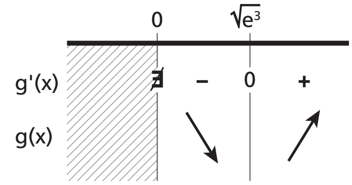


Figura 5

Inoltre la derivata seconda di $g(x)$ coincide con la derivata prima di $f(x)$, quindi $g''(x) = f'(x) = 0$ per $x = \sqrt{e}$.

Analizzando il segno della derivata seconda riportato nella tabella dei un po' segni a lato, si ottiene che, poiché

$$g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}e \cdot \frac{1}{2} - e + 1 = 1 - \frac{3}{4}e,$$

$g(x)$ ha un flesso obliquo in $\left(\sqrt{e}; 1 - \frac{3}{4}e\right)$, la concavità rivolta verso il basso in $0 < x < \sqrt{e}$ e rivolta verso l'alto in $x > \sqrt{e}$.

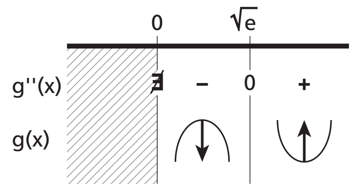


Figura 6

Tracciamo il grafico della funzione in un piano cartesiano utilizzando le informazioni ricavate.

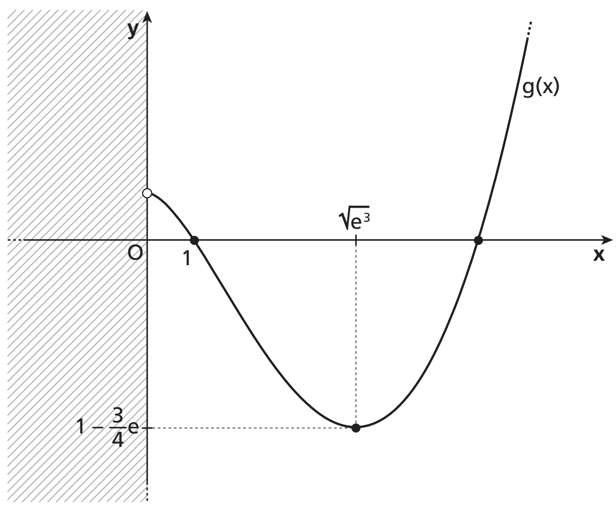


Figura 7

L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa e ha equazione $y - g(e) = g'(e)(x - e)$, dove

$$g(e) = \frac{1}{2}e^2 \cdot 1 - e^2 + 1 = 1 - \frac{1}{2}e^2,$$

$$g'(e) = f(e) = e \cdot 1 - \frac{3}{2}e = -\frac{1}{2}e.$$

Sostituendo nell'equazione della retta abbiamo $y - 1 + \frac{1}{2}e^2 = -\frac{1}{2}e(x - e)$, da cui $y = -\frac{1}{2}ex + 1$.

PROBLEMA 2

a. Della funzione polinomiale $y = P(x)$ è nota la derivata seconda $P''(x) = 12x^2 - 24x$ e la presenza nell'origine O di un punto di flesso a tangente orizzontale, per cui deve risultare che:

$P'(0) = 0$ e $P(0) = 0$.

Utilizzando il calcolo integrale otteniamo:

$$P'(x) = \int (12x^2 - 24x)\,dx = 4x^3 - 12x^2 + c_1,$$

con $c_1 = 0$ per la condizione $P'(0) = 0$:

$$P(x) = \int (4x^3 - 12x^2)\,dx = x^4 - 4x^3 + c_2,$$

con $c_2 = 0$ per la condizione $P(0) = 0$, quindi $P(x) = x^4 - 4x^3$ e $P'(x) = 4x^3 - 12x^2$.

Analizzando il segno della derivata prima $P'(x) = 4x^2(x - 3)$ riportato nella tabella dei segni a lato, si ottiene che il minimo assoluto della funzione $y = P(x)$ è nel punto $(3; -27)$.

		0		3	
x^2	+	0	+		+
$x - 3$	−		−	0	+
$P'(x)$	−	0	−	0	+
$P(x)$	↘		↘		↗
				min	

■ **Figura 8**

Poiché la funzione $y = Q(x)$ si deve ottenere da $y = P(x)$ con una dilatazione verticale di fattore k, confrontando i grafici delle due funzioni deve risultare che $k < 0$ e il punto di minimo assoluto $(3; -27)$ della funzione $y = P(x)$ deve corrispondere al massimo assoluto della funzione $y = Q(x)$ che deve avere ordinata $\frac{27}{4}$, per cui $k = \frac{27}{4} : (-27) = -\frac{1}{4}$ e l'espressione analitica di $y = Q(x)$ vale:

$$y = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3.$$

b. Consideriamo la funzione $y = P(x) \cdot Q(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3)^2 = -\frac{1}{4}x^6(x - 4)^2$.

- Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$.
- Gli zeri sono in $x = 0$ e $x = 4$.
- La funzione ha segno sempre minore o uguale a zero: è sempre negativa tranne dove si annulla in $x = 0$ e $x = 4$.
- Per il calcolo degli estremi relativi, calcoliamo la derivata prima della funzione:

  $$y' = -\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3)(4x^3 - 12x^2) = -2x^5(x - 3)(x - 4)$$

  Studiando il segno della derivata prima, si ottengono i punti di massimo assoluti in $(0; 0)$ e in $(4; 0)$ e un punto di minimo relativo in $\left(3; -\frac{729}{4}\right)$.

		0		3		4	
$-2x^5$	+	0	−		−		−
$x - 3$	−		−	0	+		+
$x - 4$	−		−		−	0	+
y'	+	0	−	0	+	0	−
y	↗		↘		↗		↘
		max		min		max	

■ **Figura 9**

- Per il calcolo dei punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda della funzione:

  $$y'' = -2x^4(7x^2 - 42x + 60).$$

  Studiando i segni della derivata seconda, otteniamo due punti di flesso di ascisse $x = 3 \pm \frac{\sqrt{21}}{7}$.

		0		$3 - \frac{\sqrt{21}}{7}$		$3 + \frac{\sqrt{21}}{7}$	
$-2x^4$	−	0	−		−		−
$7x^2 - 42x + 60$	+		+	0	−	0	+
y''	−	0	−	0	+	0	−
y	∩		∩		∪		∩

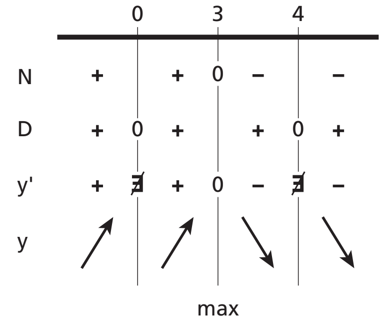
■ **Figura 10**

Consideriamo la funzione $y = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^4 - 4x^3}$, reciproca di $y = P(x)$.

- Il suo dominio è $x \neq 0 \wedge x \neq 4$.
- La funzione non ha zeri.
- La funzione, come $y = P(x)$, è positiva se $x < 0 \vee x > 4$ ed è negativa se $0 < x < 4$.
- Per il calcolo degli estremi relativi, calcoliamo la derivata prima della funzione:

  $$y' = -\frac{4(x-3)}{(x^3-4x^2)^2}.$$

  Studiando il segno della derivata prima, si ottiene un punto di massimo relativo in $\left(3; -\frac{1}{27}\right)$.

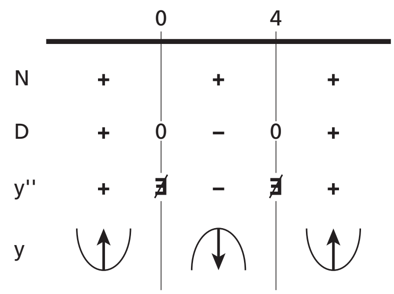


■ **Figura 11**

- Per il calcolo dei punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda della funzione:

  $$y'' = \frac{4(5x^2-30x+48)}{x^5(x-4)^3}.$$

  Studiando il segno della derivata seconda, si trova che la funzione non ammette punti di flesso.



■ **Figura 12**

c. Nell'intervallo [0; 4] la funzione $y = P(x)$, assume segno negativo, come si può anche dedurre dal grafico della funzione, per cui l'area richiesta è l'opposto del valore dell'integrale definito calcolato in tale intervallo:

$$A = -\int_0^4 (x^4 - 4x^3)dx = -\left[\frac{x^5}{5} - x^4\right]_0^4 = -\frac{1024}{5} + 256 = \frac{256}{5}.$$

d. La funzione proposta $y = \frac{x^2}{P(x)}$ con $x \neq 0 \wedge x \neq 4$ si può semplificare: $y = \frac{x^2}{x^4 - 4x^3} = \frac{1}{x(x-4)}$.

Per verificare che la funzione $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una sua primitiva per $x > 4$, possiamo calcolare la derivata prima $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x-4} \cdot \frac{x-(x-4)}{x^2} = \frac{1}{x(x-4)},$$

che coincide con la funzione di partenza per cui $y = F(x)$ è una sua primitiva.

Se ora $t \geq 5$, l'integrale definito proposto vale:

$$\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)\right]_5^t = \frac{1}{4}\ln\frac{t-4}{t} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5t-20}{t}\right).$$

Il suo limite per $t \to +\infty$ vale:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5t-20}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{4}\ln\left(5 - \frac{20}{t}\right) = \frac{1}{4}\ln 5.$$

Tale valore rappresenta l'area finita della superficie illimitata del trapezoide compreso tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x(x-4)}$ e l'asse x relativo all'intervallo $x \geq 5$.

QUESTIONARIO

1

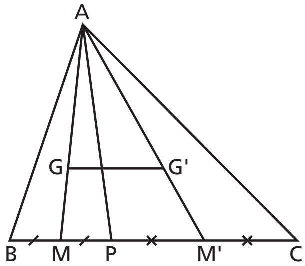


Figura 13

Ipotesi:

G baricentro di ABP

G' baricentro di AP

Tesi:

$GG' /\!/ BC$

Dimostrazione. Indichiamo con M il punto di incontro della mediana AM con il lato BP nel triangolo ABP e con M' il punto di incontro della mediana AM' con il lato PC nel triangolo APC. Per la proprietà del baricentro di un triangolo, esso divide la mediana in due parti in cui quella che ha un estremo nel vertice è doppia dell'altra, quindi

$$AG : GM = 2 : 1 \quad \text{e} \quad AG' : G'M' = 2 : 1 \quad \rightarrow \quad AG : GM = AG' : G'M'.$$

Inoltre, per la proprietà del comporre, $AG : (AG + GM) = AG' : (AG' + G'M')$ quindi $AG : AM = AG' : AM'$. Ora consideriamo i triangoli AGG' e AMM'. Essi hanno due lati ordinatamente in proporzione (AG e AM, AG' e AM') e l'angolo compreso congruente ($M\widehat{A}M'$ in comune), quindi sono simili per il secondo criterio di similitudine. In particolare $G\widehat{G'}A \cong M\widehat{M'}A$ perché angoli corrispondenti in triangoli simili.

Se consideriamo le rette GG' e BC tagliate dalla trasversale $G'M$, esse hanno due angoli corrispondenti congruenti ($G\widehat{G'}A \cong M\widehat{M'}A$ per precedente dimostrazione) e quindi sono parallele.

In maniera alternativa, possiamo anche notare che i punti G e G', M e M' sono corrispondenti sulle rette AM e AM' e che i segmenti AG e GM sono direttamente proporzionali ai segmenti AG' e $G'M'$. Quindi, per il teorema inverso del Teorema di Talete, le rette GG' e MM' sono parallele.

2 L'evento «esce la faccia 5» ha probabilità $p = \frac{1}{6}$, mentre l'evento contrario ha probabilità $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Applichiamo la formula di Bernoulli per le prove ripetute per calcolare la probabilità che la faccia 5 esca tre volte su otto lanci:

$$p_{(3,8)} = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{56 \cdot 5^5}{6^8} \simeq 0,104,$$

quindi circa il 10,4%.

Se otteniamo la faccia 5 per la terza volta all'ottavo lancio, significa che abbiamo ottenuto la faccia 5 due volte nei primi 7 lanci e all'ottavo lancio esce 5. I due eventi sono indipendenti, quindi la probabilità del prodotto logico dei due eventi è il prodotto delle probabilità degli eventi stessi:

$$E_1 = \text{«esce la faccia 5 due volte nei primi 7 lanci»} \quad \rightarrow \quad p(E_1) = p_{(2,7)} = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{21 \cdot 5^5}{6^7};$$

$$E_2 = \text{«esce la faccia 5 nell'ottavo lancio»} \quad \rightarrow \quad p(E_2) = \frac{1}{6};$$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{21 \cdot 5^5}{6^7} \cdot \frac{1}{6} \simeq 0,039$$

quindi circa il 3,9%.

3 Se il piano $3x + 4y - 5z + 10 = 0$ è tangente alla sfera in $P(-1; 2; 3)$, allora la retta s perpendicolare al piano in P passa per il centro della sfera.

Determiniamo il vettore normale $\vec{n}$ al piano individuato dai coefficienti delle incognite x, y, z dell'equazione: $\vec{n}(3; 4; -5)$. Ricaviamo le equazioni parametriche della retta s che ha vettore direzione parallelo a $\vec{n}$ e passa per il punto P:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Troviamo ora i centri delle sfere determinando i punti C_i della retta che hanno distanza da P uguale al raggio della circonferenza:

$$\overline{PC} = r \rightarrow \overline{PC}^2 = r^2 (-1+3t+1)^2 + (2+4t-2)^2 + (3-5t-3)^2 = 50 \rightarrow$$

$$9t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 50 \rightarrow 50t^2 = 50 \rightarrow t_1 = -1 \vee t_2 = 1.$$

Sostituiamo i valori ottenuti nelle equazioni parametriche della retta e determiniamo i centri delle sfere: per $t_1 = -1$ otteniamo $C_1(-4; -2; 8)$, per $t_2 = +1$ otteniamo $C_2(2; 6; -2)$.

Ora sostituiamo i valori trovati nell'equazione cartesiana della sfera nello spazio:

$$\gamma_1: (x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-8)^2 = (5\sqrt{2})^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 16z + 34 = 0;$$

$$\gamma_2: (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = (5\sqrt{2})^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 4z - 6 = 0.$$

4

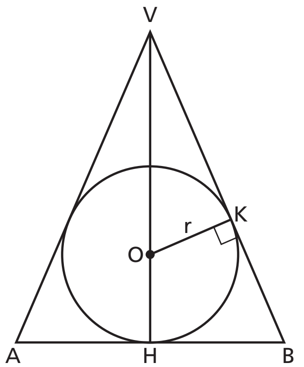


Figura 14

Rappresentiamo la sezione longitudinale del cono e della sfera inscritta di raggio $\overline{OH} = r$.

Poniamo $\overline{VO} = x$ con $x \in \mathbb{R}$, $x > r$, per cui l'altezza del cono risulta $\overline{VH} = x + r$.

Tracciamo il raggio della sfera OK che unisce il centro della sfera con il punto K di tangenza fra il cono e la sfera stessa, per cui $O\widehat{K}V = 90°$.

Consideriamo il triangolo rettangolo OKV e applichiamo il teorema di Pitagora: $\overline{VK} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$.

Consideriamo i triangoli rettangoli VOK e VHB. Essi sono simili per il primo criterio di similitudine perché hanno congruenti gli angoli retti e l'angolo OVK in in comune, quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\overline{VK} : \overline{VH} = \overline{OK} : \overline{HB} \rightarrow \overline{HB} = \frac{\overline{VH} \cdot \overline{OK}}{\overline{VK}} = \frac{(x+r) \cdot r}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

Definiamo la funzione obiettivo $f(x)$ che descrive il volume del cono

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi \frac{(x+r)^2 r^2}{x^2 - r^2} \cdot (x+r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)^2}{x-r}$$

e determiniamo i valori del cono trovando per quale valore di x il volume è minimo.

La funzione $f(x)$ è derivabile per $x > r$; calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{2(x+r)(x-r) - (x+r)^2 \cdot 1}{(x-r)^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)(2x - 2r - x - r)}{(x-r)^2} =$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}, x > r.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo per $x \neq r$, il segno della derivata prima coincide con quello del numeratore, quindi $f'(x) \geq 0$ per $x \leq -r \vee x \geq 3r$.

Considerando le limitazioni geometriche, otteniamo la tabella in figura a lato e deduciamo che il cono ha volume minimo per $x = 3r$.

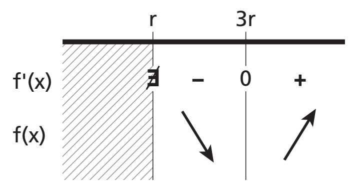


Figura 15

La distanza d del vertice del cono di volume minimo dalla sfera è $d = \overline{VO} - r = x - r = 3r - r = 2r$.

5 Affinché la retta di equazione $y = x - 2$ risulti tangente alla curva grafico della funzione di equazione $y = f(x) = x^3 + kx$ deve esistere almeno un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui il coefficiente angolare della retta, che è $m = 1$, risulti uguale al valore della derivata prima della funzione calcolato in x_0 e contemporaneamente che la retta e la curva assumano lo stesso valore in x_0.
Essendo la derivata prima della funzione $y' = 3x^2 + k$, occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 3x_0^2 + k \\ x_0 - 2 = x_0^3 + kx_0 \end{cases} \to \begin{cases} k = 1 - 3x_0^2 \\ x_0 - 2 = x_0^3 + (1 - 3x_0^2)x_0 \end{cases} \to \begin{cases} k = 1 - 3x_0^2 \\ x_0 - 2 = x_0^3 + x_0 - 3x_0^3 \end{cases} \to \begin{cases} k = 1 - 3x_0^2 \\ x_0^3 = 1 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} k = -2 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Quindi per $k = -2$ la curva di equazione $y = x^3 - 2x$ risulta tangente alla retta di equazione $y = x - 2$ nel punto comune di coordinate $(1; -1)$.

6 Una funzione polinomiale di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$ e il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto può essere di due tipi:

- $y = ax(x - 3)^2$, se è tangente in $(3; 0)$ all'asse x,
- $y = bx^2(x - 3)$, se è tangente in $(0; 0)$ all'asse x,

dove a e b sono opportune costanti reali non nulle che si possono determinare imponendo il passaggio per il punto $P(1; -4)$.
Determiniamo il valore di a:

$$-4 = a(-2)^2 \to a = -1$$

e la prima funzione ha equazione $y = -x(x - 3)^2$.
Determiniamo il valore di b:

$$-4 = b(-2) \to b = 2$$

e la seconda funzione ha equazione $y = 2x^2(x - 3)$.

Ricordiamo che nel testo del quesito è richiesta una delle due funzioni, quindi non sono necessarie entrambe.

Calcoliamo ora l'area della regione piana compresa tra l'asse x ed il grafico delle due funzioni polinomiali trovate.
Si può facilmente verificare che entrambe le funzioni risultano di segno negativo nell'intervallo $]0; 3[$, per cui in entrambi i casi l'area richiesta coincide con l'opposto del valore dell'integrale definito della funzione calcolato nell'intervallo $[0; 3]$.

Per la prima funzione risulta:

$$A_1 = -\int_0^3 -x(x-3)^2 dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4}.$$

Per la seconda funzione risulta:

$$A_2 = -\int_0^3 2x^2(x-3) dx = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{2} + 2x^3\right]_0^3 = -\frac{81}{2} + 54 = \frac{27}{2}.$$

7 Sia la funzione integrale $N(x) = \int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t} dt$, posta al numeratore, sia la funzione polinomiale $D(x) = (x - 1)^2$, posta al denominatore, sono entrambe continue in $x = 1$ e risulta che:

$$N(1) = \int_1^1 (t^2 - 1) \cdot e^{2t} dt = 0 \text{ e } D(1) = (1 - 1)^2 = 0.$$

Pertanto, il limite proposto si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Entrambe le funzioni $y = N(x)$ e $y = D(x)$ sono anche derivabili su $\mathbb{R}$ e risulta:

$N'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{2x}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$D'(x) = 2(x-1) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Esiste il limite del rapporto delle derivate, quindi è possibile applicare al limite proposto il teorema di De L'Hospital e risulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1) \cdot e^{2t}\, dt}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1) \cdot e^{2x}}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1) \cdot e^{2x}}{2\cancel{(x-1)}} = e^2.$$

8 L'affermazione $A \Rightarrow B$ si può formulare come:
«Se una funzione f è continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$ e ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a; b)$, allora $f'(x_0) = 0$».
Tale affermazione è Vera perché coincide con l'enunciato del teorema di Fermat.

L'affermazione $B \Rightarrow A$ si può formulare come:
«Se una funzione f è continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$ ed $\exists\, x_0 \in (a; b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ allora f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a; b)$».
Tale affermazione è Falsa perché il teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria per l'esistenza di un massimo o di un minimo locale di una funzione derivabile ma non è una condizione sufficiente.
Un controesempio può essere la funzione $f(x) = x^3$ che è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata prima $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$ ma tale punto non è massimo o minimo locale per f, essendo un punto di flesso a tangente orizzontale.

Poiché l'affermazione $B \Rightarrow A$ è falsa, sono false anche le affermazioni $A \Leftrightarrow B$ e $B \Leftrightarrow A$.