SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME • 29 APRILE 2016

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.

PROBLEMA 1

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (FE) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.

Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di m^3 al giorno in regime di magra, 130 milioni di m^3 al giorno in regime normale con un'oscillazione del 10% e 840 milioni di m^3 al giorno in regime di piena (fonte *deltadelpo.net*).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

- nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di m^3 al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di m^3 al giorno;
- nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.

1. Indicando con t il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t) = a \cdot \cos(b \cdot t) + c,$$

$$g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c,$$

$$h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-b \cdot t} + c,$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}.$$

2. Individuata la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.

3. Studia la variazione della portata nel tempo e valuta dopo quanti giorni tale variazione raggiunge il suo minimo. Inoltre, dovendo prevedere quando autorizzare la ripresa della navigazione in condizioni di sicurezza, valuta, analiticamente o per via grafica, dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale.

4. Nel tempo trascorso tra l'inizio del fenomeno e il rientro nei limiti normali, qual è il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale?

PROBLEMA 2

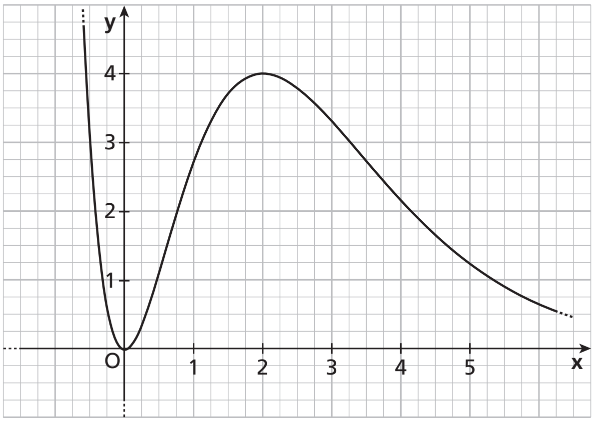


Figura 1

Il grafico G in figura 1 rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, k > 1.$$

1. determina il valore del parametro k affinché la $f(x)$ sia rappresentata dal grafico, motivando la tua risposta. Calcola inoltre le coordinate dei punti di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti e le equazioni delle rette tangenti a G nei punti di flesso;
2. considera un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine, nel punto della funzione $f(x)$ di ascissa a, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determina il valore $a \geq 0$ per cui la sua area sia massima;
3. calcola l'area della regione piana delimitata da G e dall'asse x nell'intervallo $[0; 2]$ e determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo $[0; 2]$ si adotta, per approssimare $f(x)$, una funzione razionale di 3° grado della forma

   $$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

   con $r(0) = f(0) = 0$, $r(2) = f(2) = 4$, $r'(0) = 0$, $r'(2) = 0$;
4. dimostra che, dette A e B le intersezioni tra le tangenti a G nei punti di flesso e l'asse x, C e D le proiezioni dei punti di flesso sull'asse x, si ha:

   $$\overline{AB} = 2\overline{CD},$$

   per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

QUESTIONARIO

1 Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

2 Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

3 Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

a. qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?

b. descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

4 Utilizzando il differenziale calcola di quanto aumenta il volume di un cono retto avente raggio di base 2 m e altezza 4 m quando il raggio di base aumenta di 2 cm.

5 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

6 Determinare la soluzione particolare della equazione differenziale $y' - x = xy$, verificante la condizione iniziale $y(0) = 2$.

7 Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo [1; 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

8 Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

9 In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano β di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano β sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10 Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

PROBLEMA 1

1. La funzione che descrive la portata del Po:

- deve essere crescente in [0; 2], perché nei primi due giorni la portata aumenta da 130 milioni di metri cubi al giorno (= 130 Mm^3/giorno) a 950 Mm^3/giorno, quindi la derivata prima deve essere positiva in [0; 2];
- poi deve decrescere, prima più velocemente e dopo più lentamente, riportandosi al valore normale di 130 Mm^3/giorno, quindi la derivata prima dopo il giorno $t = 2$ deve essere negativa assumendo inizialmente valori minori e poi valori maggiori (ma sempre negativi).

  Esaminiamo quale delle 3 funzioni date può soddisfare queste condizioni.

- Caso $f(t) = a\cos(bt) + c$.
  La funzione è periodica, quindi non può descrivere il fenomeno considerato.
  Infatti, se i parametri sono tali per cui la funzione passa dal valore iniziale 130 al valore massimo 950 in 2 giorni, allora al quarto giorno (cioè dopo altri 2 giorni) il valore ridiscende a 130 per poi tornare a salire subito dopo, mentre la portata del fiume si deve stabilizzare a circa 130.
- Caso $g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$.

  Fissati i parametri, l'esponente $-\frac{t^2}{b}$ ha segno costante e quindi la funzione $g(t)$ sarebbe o sempre crescente o sempre decrescente.
  Anche questa funzione non può rappresentare il fenomeno.
- Caso $h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c$.
  Per esclusione, questa è la funzione che descrive il fenomeno.
  Per sicurezza, esaminiamo comunque il suo comportamento.
  All'istante iniziale la funzione assume valore $h(0) = c$.
  Se ***b* è positivo**, l'esponente $(1 - bt)$ tende a 0 al crescere di t e questo comporta che al trascorrere dei giorni il valore della funzione si riporta al valore iniziale; infatti:

  $$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} (a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c) = c,$$

  in quanto nella forma indeterminata $t \cdot e^{1-bt}$ prevale l'infinitesimo dato dall'esponenziale.
  La derivata prima

  $$h'(t) = a \cdot e^{1-bt} + a \cdot t \cdot e^{1-bt} \cdot (-b) = a \cdot e^{1-bt}(1 - bt)$$

  si annulla in $t = \frac{1}{b}$, e assume segni opposti in $\left[0; \frac{1}{b}\right[$ e $\left]\frac{1}{b}; +\infty\right[$.

  Se scegliamo allora anche ***a* positivo**, il segno di $a(1 - bt)$ è positivo prima di $t = \frac{1}{b}$ e negativo dopo; si realizza così la condizione di crescenza e decrescenza della funzione portata.

2. Determiniamo numericamente i parametri a, b, c della funzione $h(t)$.
Il parametro c è la portata iniziale, poiché $h(0) = c$, quindi $c = 130$.
$c = 130$ è anche il valore di regime per $t \to \infty$, quindi $h(t) = 130$ è asintoto orizzontale.
Il valore massimo si registra al secondo giorno; poiché avevamo dedotto nel punto precedente che il massimo di $h(t)$ si ha per $t = \frac{1}{b}$, otteniamo:

$$\frac{1}{b} = 2 \to b = \frac{1}{2}.$$

Imponiamo infine che il massimo valore assunto dalla funzione sia 950:

$$h(2) = 950 \;\rightarrow\; a \cdot 2 \cdot e^{1-\frac{1}{2}2} + 130 = 950 \;\rightarrow\; 2a = 950 - 130 \;\rightarrow\; a = 410.$$

La funzione che descrive la portata dell'acqua del Po a Pontelagoscuro è dunque:

$$h(t) = 410 \cdot t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130 \text{ con } t \geq 0 \text{ in giorni e } h(t) \text{ in Mm}^3.$$

La derivata prima è:

$$h'(t) = 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right);$$

$h'(t)$ si annulla in $t = 2$, è positiva per $0 \leq t < 2$ ed è negativa per $t > 2$. Quindi la funzione $h(t)$ è crescente per $0 \leq t < 2$, decrescente per $t > 2$ e $t = 2$ è punto di massimo relativo e assoluto.
Per disegnare il grafico di $h(t)$, non rimane che calcolare il punto di flesso.

$$h''(t) = 410 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\right) = -205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t + 1\right) =$$

$$-205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2 - \frac{1}{2}t\right).$$

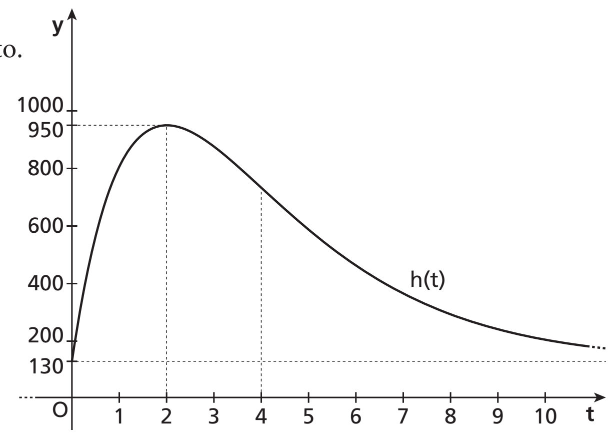
La derivata seconda è negativa, e la funzione $h(t)$ volge la concavità verso il basso, per:

$$2 - \frac{1}{2}t > 0 \;\rightarrow\; t < 4;$$

mentre per $t > 4$ la concavità è rivolta verso l'alto.
Il punto di flesso di ascissa $t = 4$ ha ordinata:

$$h(4) = 410 \cdot 4 \cdot e^{1-\frac{1}{2}4} + 130 \simeq 733.$$

Possiamo disegnare il grafico di $h(t)$.

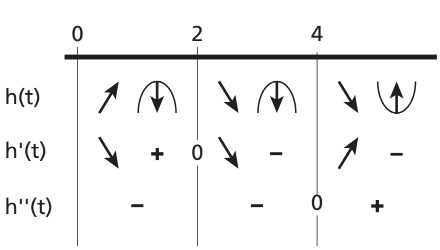


■ **Figura 2**

3. La «variazione della portata nel tempo» è rappresentata dalla derivata prima di $h(t)$.

$$h'(t) = 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right).$$

Sulla base di quanto detto nei punti precedenti, possiamo compilare il seguente schema.



■ **Figura 3**

Dunque la funzione $h'(t)$:

- è positiva e decrescente in $[0; 2[$;
- si annulla in $t = 2$;
- è negativa e decrescente in $]2; 4[$;
- è negativa e crescente in $]4; +\infty[$, quindi deve ammettere asintoto orizzontale; infatti:

$$\lim_{t \to +\infty} h'(t) = \lim_{t \to +\infty}\left[410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\right] = 0,$$

l'asintoto orizzontale è l'asse x;

- ha un minimo relativo e assoluto in $t=4$, con $h'(4)=410\cdot e^{1-\frac{1}{2}4}\left(1-\frac{1}{2}\cdot 4\right)=-410\cdot e^{-1}=-151$; la variazione della portata raggiunge quindi il suo minimo al quarto giorno di osservazione;
- interseca l'asse y alla quota $h'(0)=410\cdot e\simeq 1115$.

Per stabilire il punto di flesso di $h'(t)$, calcoliamo la sua derivata seconda, ovvero $h''(t)$:

$$h''(t)=\mathrm{D}\left[-205\cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2-\frac{1}{2}t\right)\right]=-205\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2-\frac{1}{2}t\right)-205\cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{205}{2}e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2-\frac{1}{2}t+1\right)=\frac{205}{2}e^{1-\frac{1}{2}t}\left(3-\frac{1}{2}t\right).$$

$h''(t)$ si annulla e cambia di segno in corrispondenza di $t=6$. La funzione $h'(t)$ ha un punto di flesso in $t=6$, volge la concavità verso l'alto in $[0;6[$ e verso il basso in $]6;+\infty[$.
Tracciamo il grafico di $h'(t)$.

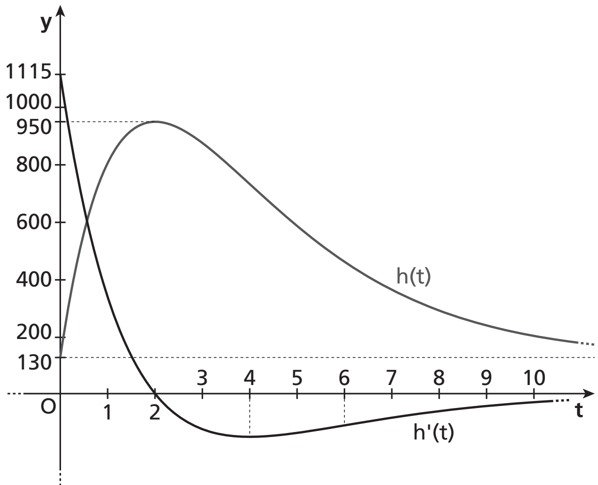


Figura 4

La portata dell'acqua in regime normale oscilla fra 117 e 143 Mm^3/giorno ($\pm 10\%$ dalla media normale di 130 Mm^3/giorno).
Perché sia autorizzata la ripresa della navigazione, deve essere:

$$h(t)<143.$$

Dal grafico di $h(t)$ deduciamo che i valori della funzione si abbassano sotto la soglia 143 verosimilmente dopo il decimo giorno. Calcoliamo:

$$h(11)=410\cdot 11\cdot e^{1-\frac{1}{2}11}+130\simeq 180;$$

$$h(12)=410\cdot 12\cdot e^{1-\frac{1}{2}12}+130\simeq 163;$$

$$h(13)=410\cdot 13\cdot e^{1-\frac{1}{2}13}+130\simeq 152;$$

$$h(14)=410\cdot 14\cdot e^{1-\frac{1}{2}14}+130\simeq 144;$$

$$h(15)=410\cdot 15\cdot e^{1-\frac{1}{2}15}+130\simeq 139.$$

Quindi il fiume può essere riaperto alla navigazione dal 15° giorno.

4. Il volume d'acqua che ha superato nei primi 15 giorni il valore di regime normale (130 milioni di metri cubi al giorno), senza tenere conto dei limiti di oscillazione, è dato dall'integrale:

$$V = \int_0^{15} [h(t) - 130]dt = \int_0^{15} 410 \cdot t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} dt.$$

Risolviamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} dt = -2\int t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{1-\frac{1}{2}t} dt = -2\left[te^{1-\frac{1}{2}t} - \int e^{1-\frac{1}{2}t} dt\right] = -2\left[te^{1-\frac{1}{2}t} + 2\int \left(-\frac{1}{2}\right) e^{1-\frac{1}{2}t} dt\right] =$$

$$-2\left(te^{1-\frac{1}{2}t} + 2e^{1-\frac{1}{2}t}\right) = -2e^{1-\frac{1}{2}t}(t+2).$$

Proseguiamo con il calcolo del volume:

$$V = 410\int_0^{15} t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} dt = 410\left[-2e^{1-\frac{1}{2}t}(t+2)\right]_0^{15} = -820\left\{\left[e^{1-\frac{1}{2}15}(15+2)\right] - \left[e^{1-\frac{1}{2}0}(0+2)\right]\right\} =$$

$$-820(17e^{-6,5} - 2e) \simeq 4437 \text{ Mm}^3.$$

Quindi, nei 15 giorni considerati, attraverso le centraline di controllo sono passati circa 4437 milioni di metri cubi d'acqua in più rispetto al volume d'acqua che si avrebbe avuto in regime normale.
Se consideriamo anche le oscillazioni del 10% del regime normale, e quindi consideriamo 143 come valore di regime normale, dobbiamo sottrarre $13 \cdot 15$ a 4437. In tal caso, nei 15 giorni considerati, sono passati 4242 milioni di metri cubi d'acqua in più rispetto al regime normale.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = x^k e^{k-x}$, con $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, ha un punto di minimo relativo in $x = 0$ e un punto di massimo relativo in $x = 2$, come si deduce dal grafico del problema.
Poiché la funzione è derivabile su $\mathbb{R}$, la derivata prima si deve annullare in $x = 0$ e $x = 2$.
La derivata prima:

$$f'(x) = x^k e^{k-x} = kx^{k-1}e^{k-x} - x^k e^{k-x} = x^{k-1}e^{k-x}(k-x)$$

si annulla in $x = 0$ e $x = k$, quindi deve essere $k = 2$ e la funzione da considerare è:

$$f(x) = x^2 e^{2-x}.$$

Assicuriamoci che questa funzione corrisponda con il grafico dato.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{2-x} = +\infty$, in accordo al grafico.

  La funzione non ammette asintoto obliquo sinistro, in quanto:

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{2-x} = -\infty \text{ non è finito.}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{2-x} = 0$, in accordo con il grafico.

  Nel limite compare la forma indeterminata $\infty \cdot 0$, ma l'infinitesimo dell'esponenziale e^{2-x} prevale sull'infinito x^2, quindi il risultato del limite è 0.
  La funzione ammette dunque l'asse x come asintoto orizzontale destro.

- La derivata prima:

  $$f'(x) = xe^{2-x}(2-x)$$

  è negativa per $x < 0 \vee x > 2$, positiva per $0 < x < 2$, quindi la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < 0 \vee x > 2$ e crescente per $0 < x < 2$, ammette minimo relativo in $x = 0$ con $f(0) = 0$ e massimo relativo in $x = 2$ con $f(2) = 2^2 e^0 = 4$, in accordo con il grafico.

Determiniamo i punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico G nei punti flesso.
Eseguiamo i calcoli sulla generica funzione $f(x) = x^k e^{k-x}$, dove è ancora presente il parametro k, perché al punto **4.** del problema vanno considerate le rette tangenti al variare di k.
La derivata prima, già calcolata, è:

$$f'(x) = x^{k-1}e^{k-x}(k-x).$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (k-1)x^{k-2}e^{k-x}(k-x) - x^{k-1}e^{k-x}(k-x) - x^{k-1}e^{k-x} = \\ &x^{k-2}e^{k-x}[(k-1)(k-x) - x(k-x) - x] = x^{k-2}e^{k-x}(k^2 - kx - k + x - kx + x^2 - x) = \\ &x^{k-2}e^{k-x}(x^2 - 2kx + k^2 - k). \end{aligned}$$

Osserviamo che se $k \geq 3$ e k è dispari, $x = 0$ è un punto di flesso per la funzione perché annulla la derivata seconda e $f''(x)$ cambia di segno prima e dopo lo 0. Poiché $f'(0) = 0$, tale flesso è a tangente orizzontale.
Se invece $k \geq 2$ e k è pari, la derivata seconda non cambia di segno prima e dopo $x = 0$, quindi $x = 0$ non è punto di flesso.
Per trovare gli altri punti di flesso, calcoliamo gli zeri (diversi da $x = 0$) della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2kx + k^2 - k = 0 \ \rightarrow \ x = k \pm \sqrt{k^2 - k^2 + k} = k \pm \sqrt{k}\,.$$

Compiliamo lo schema dei segni della derivata seconda e della concavità della funzione (limitando l'esame a $x > 0$) ricordando che per $k > 1$ si ha $k > \sqrt{k}$.

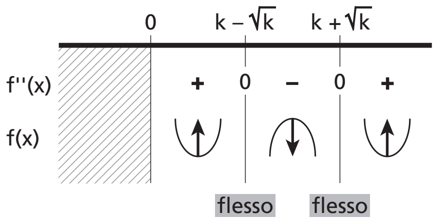


Figura 5

La funzione $f(x)$ presenta dunque due flessi di ascissa $x_1 = k - \sqrt{k}$ e $x_2 = k + \sqrt{k}$.
Calcoliamo le equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso.
Il primo flesso F_1, di ascissa $x_1 = k - \sqrt{k}$, ha ordinata:

$$y_1 = f(k - \sqrt{k}) = (k - \sqrt{k})^k e^{k-(k-\sqrt{k})} = (k - \sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}}.$$

La retta tangente al grafico in F_1 ha coefficiente angolare:

$$m_1 = f'(k - \sqrt{k}) = (k - \sqrt{k})^{k-1} e^{k-(k-\sqrt{k})}[k - (k - \sqrt{k})] = \sqrt{k}(k - \sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}$$

ed equazione:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \ \rightarrow \ y - (k - \sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}} = \sqrt{k}(k - \sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}(x - k + \sqrt{k}).$$

Il secondo flesso F_2, di ascissa $x_2 = k + \sqrt{k}$, ha ordinata:

$$y_2 = f(k + \sqrt{k}) = (k + \sqrt{k})^k e^{k-(k+\sqrt{k})} = (k + \sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}}.$$

La retta tangente al grafico in F_2 ha coefficiente angolare:

$$m_2 = f'(k + \sqrt{k}) = (k + \sqrt{k})^{k-1} e^{k-(k+\sqrt{k})}[k - (k + \sqrt{k})] = -\sqrt{k}(k + \sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}$$

ed equazione:

$$y - y_2 = m_2(x - x_2) \ \rightarrow \ y - (k + \sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}} = -\sqrt{k}(k + \sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}(x - k - \sqrt{k}).$$

In particolare, le coordinate dei punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico nei suoi punti di flesso nel caso $k = 2$ sono:

$F_1\left(2-\sqrt{2};\left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}\right) \simeq (0{,}59; 1{,}41);$

$m_1 = f'\left(2-\sqrt{2}\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)e^{2-\left(2-\sqrt{2}\right)}\left[2-\left(2-\sqrt{2}\right)\right] = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{\sqrt{2}} \simeq 3{,}41;$

$y - y_1 = m_1(x - x_1) \;\rightarrow\; y - \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{\sqrt{2}}\left(x-2+\sqrt{2}\right);$

$F_2\left(2+\sqrt{2};\left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}\right) \simeq (3{,}41; 2{,}83);$

$m_2 = f'\left(2+\sqrt{2}\right) = \left(2+\sqrt{2}\right)e^{2-\left(2+\sqrt{2}\right)}\left[2-\left(2+\sqrt{2}\right)\right] = \left(-2\sqrt{2}-2\right)e^{-\sqrt{2}} \simeq -1{,}17;$

$y - y_2 = m_2(x - x_2) \;\rightarrow\; y - \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}} = \left(-2\sqrt{2}-2\right)e^{-\sqrt{2}}\left(x-2-\sqrt{2}\right).$

2. Fissato $a \geq 0$, consideriamo il triangolo rettangolo *OPQ* di vertici:

$O(0; 0)$, $P(a; 0)$, $Q(a; f(a))$,

la cui area, dipendente da a, è:

$$h(a) = \frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}a\cdot f(a) = \frac{1}{2}a\cdot a^2e^{2-a} = \frac{1}{2}a^3e^{2-a}.$$

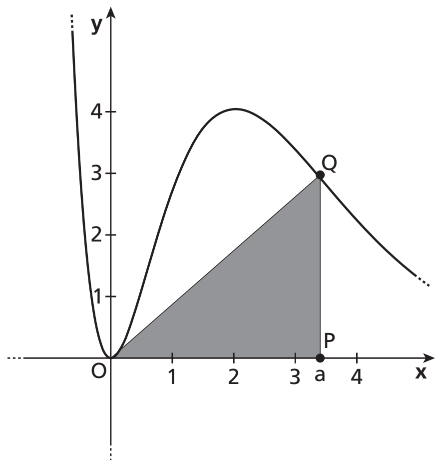


Figura 6

Determiniamo a in modo che l'area sia massima.
Sicuramente è $a > 0$, perché per $a = 0$ il triangolo degenera nell'origine e ha area nulla.
Per $a > 0$, cerchiamo il massimo relativo di $h(a)$. La derivata prima:

$$h'(a) = D\left[\frac{1}{2}a^3e^{2-a}\right] = \frac{1}{2}3a^2e^{2-a} - \frac{1}{2}a^3e^{2-a} = \frac{1}{2}a^2e^{2-a}(3-a)$$

si annulla per $a = 3$, è positiva per $0 < a < 3$ e negativa per $a > 3$. La funzione $h(a)$ ha quindi massimo per $a = 3$: l'area del triangolo *OPQ* è massima quando $a = 3$ e vale $\frac{27}{2}e^{-1}$.

3. L'area della regione di piano delimitata da $f(x)$ e dall'asse x in $[0; 2]$ è data da:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2e^{2-x}dx.$$

Deriviamo per parti l'integrale indefinito (trascuriamo la costante additiva finale perché non servirà nel calcolo dell'integrale definito):

$$\int x^2e^{2-x}dx = -\int x^2\left(-e^{2-x}\right)dx = -\left[x^2e^{2-x} - \int 2xe^{2-x}dx\right] =$$

$$-x^2e^{2-x} - 2\int x\left(-e^{2-x}\right)dx = -x^2e^{2-x} - 2\left[xe^{2-x} - \int e^{2-x}dx\right] =$$

$$-x^2e^{2-x}-2xe^{2-x}-2\int(-e^{2-x})dx=-x^2e^{2-x}-2xe^{2-x}-2e^{2-x}=$$

$$-e^{2-x}(x^2+2x+2).$$

Proseguiamo con il calcolo dell'area:

$$A=\int_0^2 x^2e^{2-x}dx=[-e^{2-x}(x^2+2x+2)]_0^2=$$

$$[-e^{2-2}(2^2+2\cdot2+2)]-[-e^{2-0}(0^2+2\cdot0+2)]=-10+2e^2\simeq 4{,}778.$$

Determiniamo il valore dei coefficienti del polinomio di terzo grado:

$$r(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

che approssima la funzione $f(x)$ in [0; 2]. Imponiamo le condizioni indicate dal testo del problema, osservando che la derivata prima è $r'(x)=3ax^2+2bx+c$:

$$\begin{cases}r(0)=0\\r(2)=4\\r'(0)=0\\r'(2)=0\end{cases}\to\begin{cases}d=0\\8a+4b+2c+d=4\\c=0\\12a+4b+c=0\end{cases}\to\begin{cases}d=0\\2a+b=1\\c=0\\3a+b=0\end{cases}\to\begin{cases}d=0\\b=1-2a\\c=0\\3a+1-2a=0\end{cases}\to\begin{cases}d=0\\b=3\\c=0\\a=-1\end{cases}$$

Il polinomio che approssima $f(x)$ è:

$$r(x)=-x^3+3x^2.$$

L'area sottesa al grafico di $r(x)$ nell'intervallo [0; 2] è:

$$A'=\int_0^2 r(x)dx=\int_0^2(-x^3+3x^2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}\right]_0^2=-\frac{1}{4}\cdot2^4+2^3=4.$$

L'errore percentuale commesso nel considerare l'area approssimata A' anziché l'area A è dato da:

$$\varepsilon=\frac{|A'-A|}{A}\cdot100=\frac{|4-4{,}778|}{4{,}778}\cdot100=\frac{0{,}778}{4{,}778}\cdot100\simeq16{,}3\%.$$

4. Al punto **1.** avevamo determinato le equazioni delle rette tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti di flesso al variare di k.

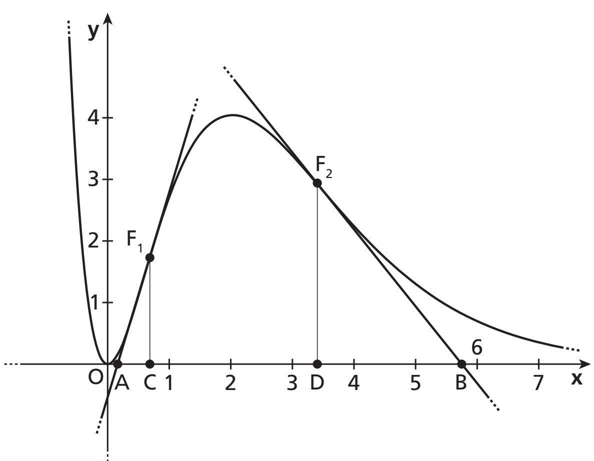


Figura 7

Determiniamo le coordinate dei punti A, B, C, D.

Dalla prima retta tangente $y-y_1=m_1(x-x_1)$, ponendo $y=0$, troviamo l'ascissa di A:

$$0-(k-\sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}}=\sqrt{k}(k-\sqrt{k})^{k-1}e^{\sqrt{k}}(x-k+\sqrt{k}) \rightarrow$$

$$x-k+\sqrt{k}=\frac{-(k-\sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}(k-\sqrt{k})^{k-1}e^{\sqrt{k}}} \rightarrow x=\frac{-k+\sqrt{k}}{\sqrt{k}}+k-\sqrt{k} \rightarrow A(1+k-2\sqrt{k};0).$$

Dalla seconda retta tangente $y-y_2=m_2(x-x_2)$, ponendo $y=0$, troviamo l'ascissa di B:

$$0-(4+\sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}}=-\sqrt{k}(k+\sqrt{k})^{k-1}e^{-\sqrt{k}}(x-k-\sqrt{k}) \rightarrow$$

$$x-k-\sqrt{k}=\frac{-(k+\sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}}}{-\sqrt{k}(k+\sqrt{k})^{k-1}e^{-\sqrt{k}}} \rightarrow x=\frac{k+\sqrt{k}}{\sqrt{k}}+k+\sqrt{k} \rightarrow B(1+k+2\sqrt{k};0).$$

Le proiezioni C e D hanno coordinate: $C(x_1;0)=(k-\sqrt{k};0)$, $D(x_2;0)=(k+\sqrt{k};0)$.
Il segmento AB è lungo:

$$\overline{AB}=x_B-x_A=1+k+2\sqrt{k}-1-k-2\sqrt{k}=4\sqrt{k}.$$

Il segmento CD è lungo:

$$\overline{CD}=x_D-x_C=(k+\sqrt{k})-(k-\sqrt{k})=2\sqrt{k}.$$

I segmenti AB e CD sono quindi legati dalla relazione: $\overline{AB}=2\overline{CD}$, per ogni $k\in\mathbb{N}$, $k>1$.

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

3 Vedi lo svolgimento del quesito 3 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

4 Il volume di un cono retto con raggio di base r e altezza h è:

$$V=\frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot altezza=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h.$$

Interpretiamo questa formula come una funzione con variabile indipendente r:

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi h\cdot r^2.$$

Il volume del cono di altezza $h=4$ m è allora espresso da:

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi\cdot r^2.$$

L'aumento di volume del cono, quando il raggio di base passa da r_0 a $r_0+\Delta r$, è dato dalla differenza $\Delta V=V(r_0+\Delta r)-V(r_0)$. Quando Δr è piccolo, possiamo approssimare tale differenza di volume con il metodo del differenziale:

$$dV=V'(r_0)\cdot dr.$$

Nel nostro caso è $r_0 = 2$ m, $dr = 2$ cm $= 0{,}02$ m e $V'(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2r = \frac{8}{3}\pi \cdot r$, quindi:

$$dV = \frac{8}{3}\pi \cdot 2 \cdot 0{,}02 \simeq 0{,}335 \text{ m}^3.$$

5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

6 L'equazione differenziale data $y' - x = xy$ è un'equazione differenziale a variabili separabili, perché può essere scritta nella forma:

$$y' = xy + x \rightarrow y' = x(y+1).$$

Calcoliamo una soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \rightarrow \frac{1}{1+y}dy = xdx \text{ con } y \neq -1.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{1+y}dy = \int xdx \rightarrow \ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + c \rightarrow |1+y| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \rightarrow y = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+c} - 1 \rightarrow$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \rightarrow y = ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1,$$

dove abbiamo posto $k = \pm e^c$, quindi $k \neq 0$ perché $e^c > 0$.
Se $y = -1$, l'equazione differenziale diventa $0 = 0$, quindi $y = -1$ è soluzione.
La soluzione generale è allora $y = ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1$, con k positivo, negativo o nullo.
Cerchiamo la soluzione particolare, imponendo la condizione $y(0) = 2$:

$$2 = ke^{\frac{1}{2}0^2} - 1 \rightarrow 2 = k - 1 \rightarrow k = 3.$$

La soluzione cercata ha espressione analitica:

$$y = 3e^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$$

7 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova per il liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.

10 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione straordinaria 2015.