PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2017

Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art.18 comma 8).

PROBLEMA 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy.

1. Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5}, Γ_0, Γ_3, Γ_4 e Γ_9.
2. Stabilisci, al variare di λ in $\mathbb{R}$, se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ, qual è l'andamento della funzione g_λ, tracciandone un diagramma indicativo.
3. Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.
4. Detti A e B i punti di intersezione tra Γ_9 e gli assi cartesiani, sia $\mathcal{G}$ la regione piana delimitata dai segmenti OA e OB e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B. Determina l'area di $\mathcal{G}$ e il volume del solido generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

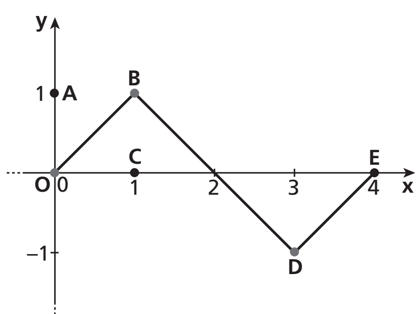


Figura 1

Come si evince dalla figura, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0; 0)$; $B(1; 1)$; $D(3; -1)$; $E(4; 0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

   qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x),$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x.

QUESTIONARIO

1 Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x\,dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x\,dx$$

in termini di e ed E.

2 Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.

3 Sapendo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b.

4 Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0; 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3.$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

nel punto di ascissa $x_0 = \pi$.

6 Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7 Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \frac{x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 8}$$

è continua nell'intervallo $[-3; -1]$ e se, nello stesso intervallo, è dotata di minimo e massimo assoluto.

8 Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia 3 esca almeno 2 volte.

9 Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10 Data la funzione:

$$f(x) = \left| 4 - x^2 \right|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

PROBLEMA 1

Osservazione preliminare. Il secondo punto del problema chiede di studiare asintoti, minimi e massimi della funzione $g_\lambda(x) = \dfrac{x-2}{x^2-\lambda}$ al variare di λ e di tracciare i relativi grafici, mentre il primo punto chiede di tracciare i grafici delle funzioni per i valori particolari $\lambda = -5, 0, 3, 4, 9$.

Anziché studiare le 5 funzioni particolari, e poi rieseguire lo studio nel caso generale, preferiamo allora studiare prima le funzioni per λ generico, ottenendo così al contempo i risultati per i valori particolari richiesti di λ.

1. e **2.** Studiamo la funzione $g_\lambda(x)$ esaminando i casi che si possono presentare al variare di λ.

Caso $\lambda < 0$.

In questo caso, il denominatore $x^2 - \lambda$ è sempre positivo.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{\lambda} \end{cases} \to \left(0; \frac{2}{\lambda}\right); \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \to (2; 0);$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \quad \to \quad x - 2 > 0 \quad \to \quad x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0, \text{ quindi } x = 0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

- Derivata prima:

$$g'_\lambda(x) = \frac{x^2 - \lambda - (x-2)2x}{(x^2-\lambda)^2} = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}.$$

Studiamo il segno:

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \to \quad -x^2 + 4x - \lambda > 0 \quad \to \quad x^2 - 4x + \lambda < 0.$$

L'equazione associata ammette soluzioni:

$$x^2 - 4x + \lambda = 0 \quad \to \quad x = 2 \pm \sqrt{4-\lambda}$$

in quanto $\lambda < 0$ e il radicando è positivo.

Risulta allora:

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \to \quad 2 - \sqrt{4-\lambda} < x < 2 + \sqrt{4-\lambda}.$$

Compiliamo lo schema dei segni.

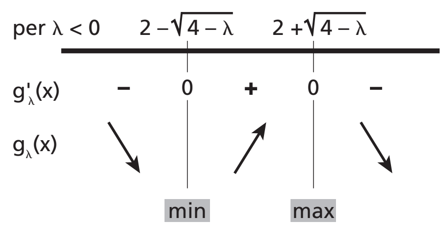


Figura 2

La funzione $g_\lambda(x)$, per $\lambda < 0$, ha un minimo di ascissa $x = 2 - \sqrt{4-\lambda}$ e un massimo di ascissa $x = 2 + \sqrt{4-\lambda}$.

- Il calcolo e lo studio del segno della derivata seconda risulta complesso e lo tralasciamo. Per le informazioni già ricavate $g_\lambda(x)$ possiamo comunque dedurre che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua: uno per $x < 2 - \sqrt{4-\lambda}$, uno per $x > 2 + \sqrt{4-\lambda}$ e un altro compreso fra i due valori indicati.

  Come grafico rappresentativo della classe $\lambda < 0$ disegniamo quello relativo a $\lambda = -5$, che è uno dei grafici richiesti al primo punto del problema.
  In particolare, Γ_{-5} presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in

  $$x = 2 - \sqrt{4-(-5)} = -1 \text{ e } x = 2 + \sqrt{4-(-5)} = 5,$$

  e interseca l'asse delle ordinate in $y = -\frac{2}{5}$.

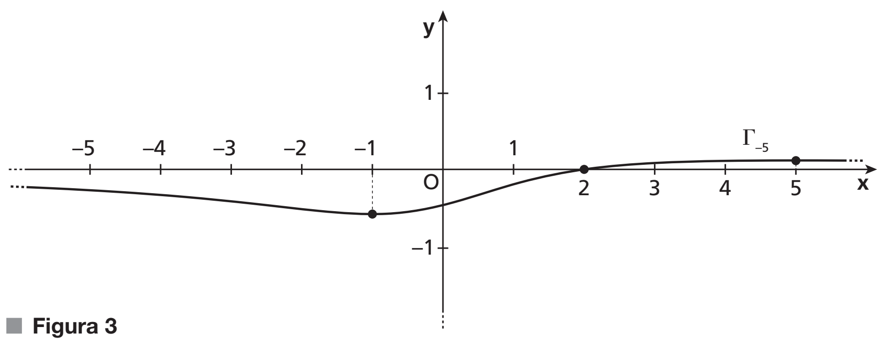


Figura 3

Caso $\lambda = 0$.

La funzione da studiare è $g_0(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2; 0).$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2} > 0 \rightarrow x - 2 > 0 \rightarrow x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$, quindi $x = 0$ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.

- Derivata prima:

$$g_0'(x) = \frac{x^2 - (x-2)2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x}{x^4} = \frac{4-x}{x^3}.$$

Compiliamo il grafico dei segni.
La funzione $g_0(x)$ non ha un minimo relativo; presenta invece un massimo relativo per $x = 4$.

per $\lambda = 0$		0		4	
$4 - x$	+		+	0	−
x^3	−	0	+		+
$g_0'(x)$	−	∄	+	0	−
$g_0(x)$	↘	∄	↗	max	↘

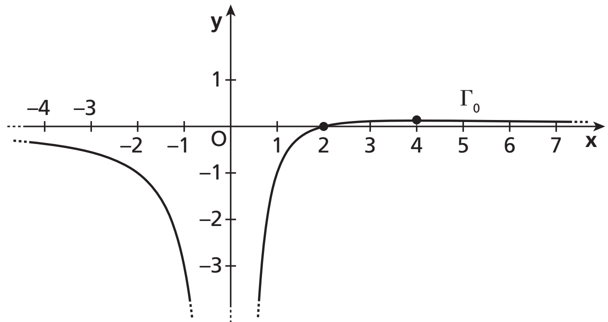
■ **Figura 4**

- Derivata seconda:

$$g_0''(x) = \frac{-x^3-(4-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3-12x^2+3x^3}{x^6} = \frac{2x^3-12x^2}{x^6} = \frac{2x-12}{x^4} = 2\frac{x-6}{x^4}.$$

La derivata seconda è negativa per $x < 6$ e positiva per $x > 6$, quindi la funzione volge la concavità verso il basso per $x < 6$, verso l'alto $x > 6$.

Disegniamo il grafico Γ_0 della funzione.



■ **Figura 5**

Caso $0 < \lambda < 4$.
In questo caso il denominatore si può scomporre nella forma $x^2 - \lambda = (x - \sqrt{\lambda})(x + \sqrt{\lambda})$, con $0 < \sqrt{\lambda} < 2$. Nella funzione $g_\lambda(x) = \dfrac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}$ il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-\sqrt{\lambda}; +\sqrt{\lambda}\}$.
- Procedendo come nel caso $\lambda < 0$ troviamo le intersezioni con gli assi: $\left(0; \dfrac{2}{\lambda}\right)$ e $(2; 0)$.
- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})} > 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.
La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda} \ \vee \ x > 2.$$

per $0 < \lambda < 4$		$-\sqrt{\lambda}$		$+\sqrt{\lambda}$		2	
$x - 2$	−		−		−	0	+
$x + \sqrt{\lambda}$	−	0	+		+		+
$x - \sqrt{\lambda}$	−		−	0	+		+
$g_\lambda(x)$	−	∄	+	∄	−	0	+

■ **Figura 6**

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2-\lambda} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

Per $x \to \pm\sqrt{\lambda}$ la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Per il teorema della permanenza del segno otteniamo:

$$\lim_{x\to-\sqrt{\lambda}^-} g_\lambda(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{\lambda}^+} g_\lambda(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{\lambda}^-} g_\lambda(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{\lambda}^+} g_\lambda(x) = -\infty.$$

Le rette di equazione $x = -\sqrt{\lambda}$ e $x = \sqrt{\lambda}$ sono asintoti verticali per la funzione.

- Il calcolo della derivata prima coincide con quello svolto nel caso $\lambda < 0$; è dunque

$$g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}$$

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \to \quad 2-\sqrt{4-\lambda} < x < 2+\sqrt{4-\lambda}.$$

Osserviamo che anche in questo caso è $\sqrt{4-\lambda} > 0$, perché $0 < \lambda < 4$.
La funzione $g_\lambda(x)$, per $0 < \lambda < 4$, ha un minimo di ascissa $x = 2-\sqrt{4-\lambda}$, (compresa fra 0 e 2) e un massimo di ascissa $x = 2+\sqrt{4-\lambda}$.

- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda.
Per le informazioni ricavate possiamo comunque dedurre che la funzione $g_\lambda(x)$ presenta sicuramente un flesso a tangente obliqua $x > 2+\sqrt{4-\lambda}$.
Come grafico rappresentativo della classe $0 < \lambda < 4$ disegniamo quello relativo a $\lambda = 3$.
In particolare, Γ_3 presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in $x = 2-\sqrt{4-3} = 1$, e $x = 2+\sqrt{4-3} = 3$, e interseca l'asse delle ordinate in $y = \frac{2}{3}$.

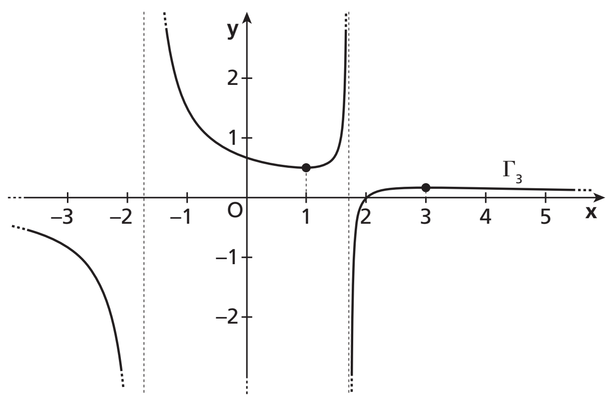


Figura 7

Caso $\lambda = 4$.

La funzione da studiare è $g_4(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$.
Il denominatore si può scomporre, e la funzione semplificare:

$$g_4(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

La funzione rimane non definita in $x = 2$, dove però presenta una discontinuità eliminabile ponendo $g_4(2) = \frac{1}{4}$. Nel seguito, consideriamo la funzione con la discontinuità eliminata.

- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{x+2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \left(0; \frac{1}{2}\right); \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{1}{x+2} \end{cases} \to \text{impossibile}.$$

- Segno della funzione:

$$\frac{1}{x+2} > 0 \quad \to \quad x+2 > 0 \quad \to \quad x > -2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x^2-4}=0, \text{ quindi } x=0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

$$\lim_{x\to -2^{\pm}}\frac{1}{x+2}=\pm\infty, \text{ quindi } x=-2 \text{ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.}$$

- La derivata prima

$$g_4'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$$

è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente e non presenta minimi o massimi relativi.

- La derivata seconda

$$g_4''(x)=+\frac{2}{(x+2)^3}$$

è positiva per $x>-2$; la funzione volge la concavità verso l'alto per $x>-2$ e verso il basso per $x<-2$.

Disegniamo il grafico plausibile Γ_4.

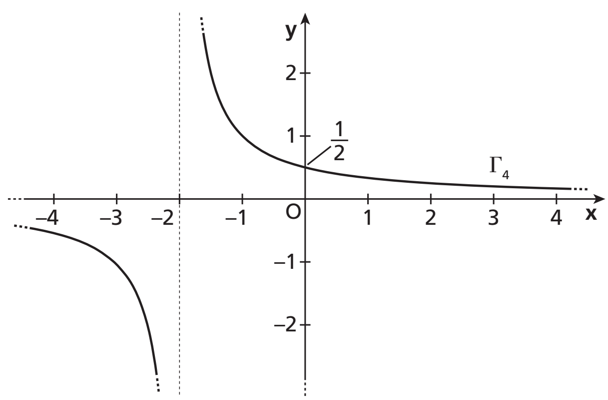


Figura 8

Caso $\lambda>4$.

Anche in questo caso il denominatore si può scomporre con la differenza di quadrati e nella funzione $g_\lambda(x)=\dfrac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}$ il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.

- Dominio: $\mathbb{R}-\{-\sqrt{\lambda};+\sqrt{\lambda}\}$, con $\sqrt{\lambda}>2$.
- Intersezione con gli assi: $\left(0;\dfrac{2}{\lambda}\right)$; $(2;0)$.
- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda}>0 \quad\to\quad \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}>0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.
La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda}<x<2 \vee x>\sqrt{\lambda}.$$

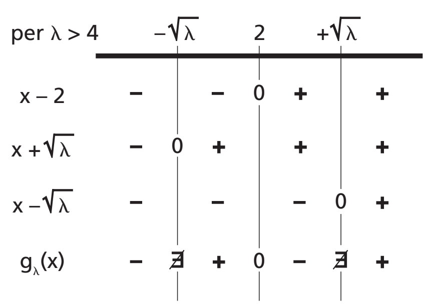


Figura 9

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

  $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

  Come nel caso $0 < \lambda < 4$, per $x \to \pm\sqrt{\lambda}$ la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Le rette di equazione $x = -\sqrt{\lambda}$ e $x = \sqrt{\lambda}$ sono asintoti verticali per la funzione.
- La derivata prima si presenta sempre nella forma

  $$g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}.$$

  In questo caso, però, il numeratore è sempre negativo (poiché $\lambda > 4$) e quindi la derivata prima è sempre negativa. La funzione $g_\lambda(x)$, per $\lambda > 4$, è sempre decrescente e non ha minimi o massimi relativi.
- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda; per quanto ricavato, possiamo comunque dedurre che la funzione $g_\lambda(x)$ presenta un flesso a tangente obliqua per $-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda}$.

  Come grafico rappresentativo della classe $\lambda > 4$ disegniamo quello relativo a $\lambda = 9$.

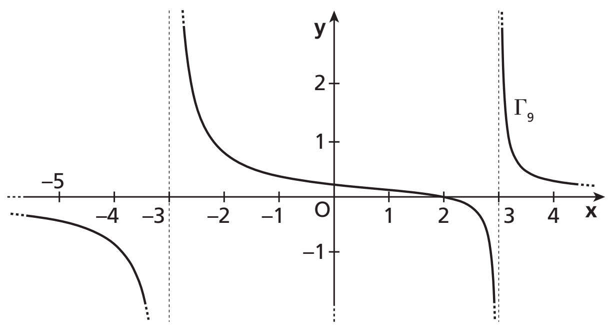


Figura 10

3. Per λ diverso da 0 e da 4, il grafico Γ_λ interseca gli assi cartesiani in $\left(0; \frac{2}{\lambda}\right)$ e $(2; 0)$. La retta r_λ che li congiunge ha equazione:

   $$r_\lambda : y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda}.$$

   Per λ diverso da 0 e da 4, inoltre, è $g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}$; il coefficiente angolare della retta tangente a Γ_λ nel punto di ascissa nulla vale dunque:

   $$g'_\lambda(0) = \frac{-\lambda}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

   Il coefficiente angolare di r_λ è uguale a $g'_\lambda(0)$ e r_λ passa per il punto $\left(0; \frac{2}{\lambda}\right)$ di Γ_λ di ascissa nulla, quindi r_λ è la tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.
4. Nel caso particolare $\lambda = 9$, il grafico Γ_9 interseca gli assi cartesiani in $A\left(0; \frac{2}{9}\right)$ e $B(2; 0)$.

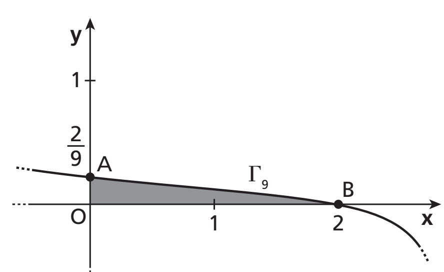


Figura 11

L'area della regione $\mathcal{G}$ sottesa al grafico di Γ_9 fra i punti A e B è data dall'integrale:

$$A = \int_0^2 \frac{x-2}{x^2-9}\,dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda nella forma:

$$\frac{x-2}{x^2-9} = \frac{x-2}{(x-3)(x+3)} = \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} = \frac{C(x+3)+D(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(C+D)x+(3C-3D)}{(x-3)(x+3)}$$

da cui:

$$\begin{cases} C+D=1 \\ 3C-3D=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=1-D \\ 3-3D-3D=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=\dfrac{1}{6} \\ D=\dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

L'integrale dell'area diventa allora:

$$A = \int_0^2 \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = \left[\frac{1}{6}\ln|x-3| + \frac{5}{6}\ln|x+3|\right]_0^2 =$$

$$\left(\frac{1}{6}\ln 1 + \frac{5}{6}\ln 5\right) - \left(\frac{1}{6}\ln 3 + \frac{5}{6}\ln 3\right) = \frac{5}{6}\ln 5 - \ln 3 \simeq 0{,}24.$$

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y è invece dato, col metodo dei gusci cilindrici, dall'integrale:

$$V = 2\pi\int_0^2 x\cdot\frac{x-2}{x^2-9}\,dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda:

$$x\cdot\frac{x-2}{x^2-9} = \frac{x^2-2x}{x^2-9} = \frac{x^2-2x-9+9}{x^2-9} = 1 + \frac{9-2x}{x^2-9}.$$

Come prima, scriviamo la frazione come somma di due frazioni con denominatori lineari:

$$\frac{9-2x}{x^2-9} = \frac{9-2x}{(x-3)(x+3)} = \frac{E}{x-3} + \frac{F}{x+3} = \frac{E(x+3)+F(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(E+F)x+(3E-3F)}{(x-3)(x+3)},$$

$$\begin{cases} E+F=-2 \\ 3E-3F=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=-2-F \\ E-F=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=-2-F \\ -2-F-F=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=\dfrac{1}{2} \\ F=-\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

L'integrale diventa:

$$V = 2\pi\int_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = 2\pi\left[x + \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{5}{2}\ln|x+3|\right]_0^2 =$$

$$2\pi\left[\left(2+\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{5}{2}\ln 5\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 3\right)\right] = 2\pi\left(2 - \frac{5}{2}\ln 5 + 2\ln 3\right) \simeq 1{,}09.$$

PROBLEMA 2

Vedi lo svolgimento del problema 2 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

3 Vedi lo svolgimento del quesito 3 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

5 La retta tangente al grafico di $f(x) = \sin x + \cos x$ nel punto di ascissa $x_0 = \pi$ ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Calcoliamo:

- $f(x_0) = f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1;$
- $f'(x) = \cos x - \sin x \quad \to \quad f'(x_0) = f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi = -1 - 0 = -1.$

La retta tangente cercata ha equazione:

$$y = -(x - \pi) - 1 \quad \to \quad y = -x + \pi - 1.$$

6 Vedi lo svolgimento del quesito 6 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

7 La funzione $f(x) = \dfrac{x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 8}$ è definita per:

$$x^2 - 8 \neq 0 \quad \to \quad x^2 \neq 8 \quad \to \quad x \neq \pm 2\sqrt{2}\text{, con } x_0 = -2\sqrt{2} \simeq -2{,}82.$$

La funzione non è quindi definita nel punto $x_0 \in [-3; -1]$ e pertanto non è continua in tale intervallo.
Nel punto x_0 la funzione presenta una discontinuità di terza specie eliminabile, poiché possiamo semplificarla nel seguente modo:

$$\overline{f}(x) = \frac{x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 8} = \frac{\cancel{x + 2\sqrt{2}}}{(\cancel{x + 2\sqrt{2}})(x - 2\sqrt{2})} \quad \to \quad \overline{f}(x) = \frac{1}{x - 2\sqrt{2}}.$$

La funzione assegnata $f(x)$ coincide pertanto con $\overline{f}(x)$ su $[-3; -2\sqrt{2}[\cup]-2\sqrt{2}; -1]$, e vale il limite:

$$\lim_{x \to -2\sqrt{2}} f(x) = \overline{f}(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \simeq -0{,}18.$$

In $[-3; -1]$, il termine $x - 2\sqrt{2}$ è crescente e negativo, quindi $\dfrac{1}{x - 2\sqrt{2}}$ è decrescente e negativo.

Inoltre

$$f(-3) = \overline{f}(-3) = \frac{1}{-3 - 2\sqrt{2}} \simeq -0{,}7,$$

$$f(-1) = \overline{f}(-1) = \frac{1}{-1 - 2\sqrt{2}} \simeq -0{,}26.$$

Possiamo concludere che $f(x)$ in $[-3; -1]$ presenta un massimo assoluto in $x=-3$ e un minimo assoluto in $x=-1$.

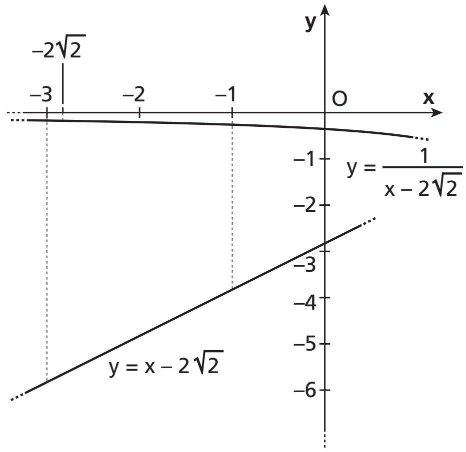


Figura 12

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.

10 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2017.