

Lo studente risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

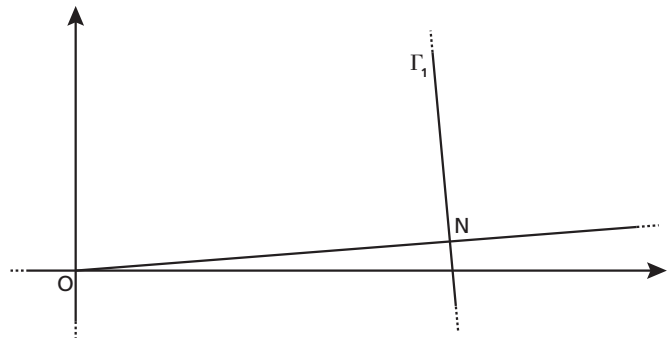
### PROBLEMA 1

Consideriamo la funzione  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Detto  $\Gamma_k$  il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro  $k$  la retta  $r_k$ , tangente a  $\Gamma_k$  nel punto di ascissa 0 e la retta  $s_k$ , tangente a  $\Gamma_k$  nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto  $M$  di ascissa  $\frac{2}{3}$ .
2. Dopo aver verificato che  $k = 1$  è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto  $M$  è minore di 10, studia l'andamento della funzione  $f_1(x)$ , determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto  $T$  il triangolo delimitato dalle rette  $r_1, s_1$  e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto  $P(x_p; y_p)$  all'interno di  $T$ , questo si trovi al di sopra di  $\Gamma_1$  (cioè che si abbia  $y_p > f_1(x)$  per tale punto  $P$ ).
4. Nella figura è evidenziato un punto  $N \in \Gamma_1$  e un tratto del grafico  $\Gamma_1$ . La retta normale a  $\Gamma_1$  in  $N$  (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a  $\Gamma_1$  in quel punto) passa per l'origine degli assi  $O$ . Il grafico  $\Gamma_1$  possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado  $n > 0$  non può possedere più di  $2n - 1$  punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



■ Figura 1

### PROBLEMA 2

Siano  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero  $x \in \mathbb{R}$ . Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\} \text{ e } g(x) = x - f(x).$$

Pertanto, ad esempio,  $f(\pi) = 3$ ,  $g(4,79) = 0,79$ .

1. A partire dalle definizioni delle funzioni  $f$  e  $g$ , mostra che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $0 \leq g(x) < 1$ .  
Disegna i grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione  $g$  è periodica di periodo 1, calcola la media di  $g$  nell'intervallo  $[0; n]$  qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ . Calcola inoltre la media di  $g$  nell'intervallo  $[0; n + \frac{1}{2}]$ , e determina il limite a cui tale media tende per  $n \rightarrow \infty$ .

3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di  $\frac{\pi}{6}$  radianti intorno all'asse  $x$  della regione di piano delimitata dai grafici di  $f$  e  $g$  nell'intervallo  $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ .

4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali  $a, b, c, d$  la funzione  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni<sup>1</sup>

$$\min g = \min h, \quad \sup g = \max h, \quad 2h'' + 2h - 1 = 0.$$

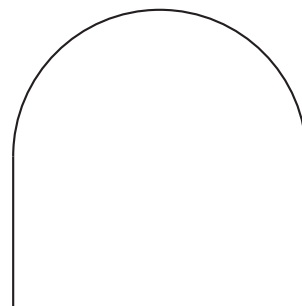
Quante sono le funzioni siffatte?

## QUESTIONARIO

- 1** Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
- 2** Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
- 3** Determinare i valori di  $k$  tali che la retta di equazione  $y = -4x + k$  sia tangente alla curva di equazione  $y = x^3 - 4x^2 + 5$ .

**4** Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$ , determinare, se esistono, i valori di  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , giustificando adeguatamente le risposte fornite.

**5** Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura: Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.



■ Figura 2

**6** Determinare  $a$  in modo che  $\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx$  sia uguale a 10.

**7** In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

**8** Determinare quali sono i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $y(x) = 2e^{kx+2}$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y'' - 2y' - 3y = 0$ .

**9** Trovare l'area  $R$  della regione di spazio racchiusa dalla curva  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , per  $4 \leq x \leq 9$ .

Sapendo inoltre che la retta di equazione  $x = k$  divide  $R$  in due figure di egual area, determinare il valore di  $k$ .

**10** Verificare che, qualunque siano le costanti reali  $\varphi$  e  $k$ , la funzione  $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y'' + 2y' + 2y = 0$ . Trovare  $\varphi$  e  $k$  tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate  $(0; 1)$ .

1.  $\min g =$  minimo della funzione  $g$ ,  $\sup g =$  estremo superiore della funzione  $g$ ,  $\max h =$  massimo della funzione  $h$ .

**PROBLEMA 1**

Vedi lo svolgimento del problema 2 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

**PROBLEMA 2**

1. Se il numero  $x$  è intero, allora il numero stesso coincide con la sua parte intera, cioè  $f(x) = x$ , e per la mantissa otteniamo:

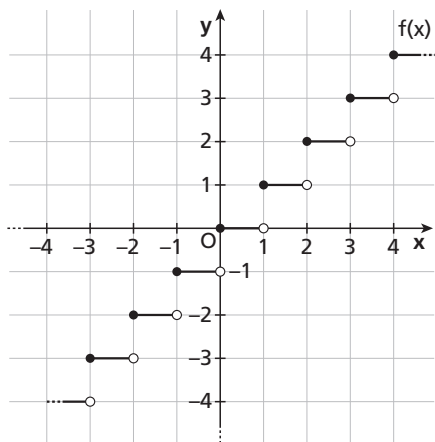
$$g(x) = x - f(x) = x - x = 0.$$

Se il numero  $x$  non è intero vale la catena di disuguaglianze  $x - 1 < f(x) < x$ , che permette di ottenere la seguente limitazione per la mantissa:

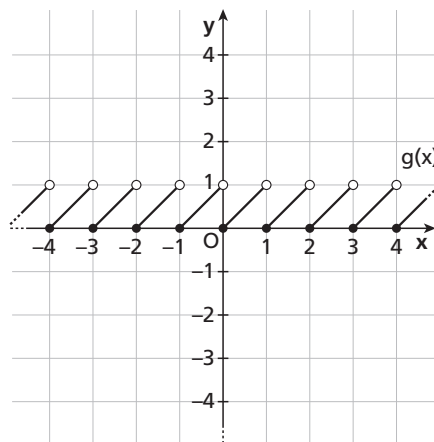
$$g(x) = x - f(x) \rightarrow x - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{perché } f(x) < x}}{x} < g(x) < x - \underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow \\ \text{perché } x-1 < f(x)}} \rightarrow 0 < g(x) < 1.$$

Risulta quindi  $0 \leq g(x) < 1$  per ogni numero reale  $x$ .

Disegniamo separatamente i due grafici della funzione parte intera  $f(x)$  e della funzione mantissa  $g(x)$ .



■ Figura 3



■ Figura 4

Entrambe le funzioni presentano una discontinuità di prima specie (un salto di ampiezza 1) nei punti di ascissa intera. In particolare, per ogni  $\alpha$  intero, sia  $f(x)$  sia  $g(x)$  risultano continue a destra in  $x = \alpha$  e discontinue a sinistra:

$$f(\alpha) = \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = f(\alpha) - 1 = \alpha - 1;$$

$$g(\alpha) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} [x - f(x)] = \alpha - (\alpha - 1) = 1.$$

2. La funzione mantissa  $g(x)$  è periodica di periodo 1. Infatti, dalla definizione di parte intera di un numero discende che per ogni  $x$  reale è  $f(x + 1) = f(x) + 1$ , da cui:

$$g(x + 1) = x + 1 - f(x + 1) = x + 1 - [f(x) + 1] = x - f(x) = g(x).$$

Verifichiamo che non esiste un altro valore  $T$ , con  $0 < T < 1$ , che possa costituire il periodo di  $g(x)$ . Se

un tale  $T$  esistesse, si avrebbe infatti:

$$g(x+T) = g(x) \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow x+T - f(x+T) = x - f(x) \rightarrow T = f(x+T) - f(x).$$

Poiché  $0 < T < 1$  per ipotesi, si hanno due possibilità:

$$f(x+T) = f(x) \rightarrow f(x+T) - f(x) = 0 \rightarrow T = 0, \text{ impossibile,}$$

oppure:

$$f(x+T) = f(x) + 1 \rightarrow f(x+T) - f(x) = 1 \rightarrow T = 1, \text{ impossibile.}$$

La funzione mantissa  $g(x)$  è dunque periodica di periodo 1. Nell'intervallo  $[0;1[$  la funzione è definita tramite l'identità  $g(x) = x$ .

Per calcolare la media  $\bar{n} = \frac{1}{n} \int_0^n g(x) dx$  di  $g(x)$  su un intervallo  $[0; n]$ , con  $n$  naturale non nullo, osserviamo che  $g(x)$  ha un numero  $n$  finito di punti di discontinuità sull'intervallo  $[0; n]$  e che è integrabile in senso improprio in  $[0; 1]$ . Infatti:

$$\int_0^1 g(x) dx = \lim_{z \rightarrow 1^-} \int_0^z g(x) dx = \lim_{z \rightarrow 1^-} \int_0^z x dx = \lim_{z \rightarrow 1^-} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^z = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2}.$$

Sfruttando la periodicità di  $g$ , otteniamo:

$$\bar{n} = \frac{1}{n} \cdot n \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

La media  $\bar{n}'$  sull'intervallo  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  è data da:

$$\bar{n}' = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4},$$

mentre la media  $\bar{n}'$  sull'intervallo  $\left[0; n + \frac{1}{2}\right]$ , con  $n$  naturale non nullo, è data da:

$$\begin{aligned} \bar{n}' &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^{n + \frac{1}{2}} g(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \left[ \int_0^n g(x) dx + \int_n^{n + \frac{1}{2}} g(x) dx \right] = \frac{2}{2n + 1} \left[ n \int_0^1 g(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx \right] = \\ &= \frac{2}{2n + 1} \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{4(2n + 1)} = \frac{4n + 1}{8n + 4}. \end{aligned}$$

Tale media, per  $n \rightarrow +\infty$ , tende a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{n}' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n + 1}{8n + 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

### 3. Rappresentiamo in figura la regione da ruotare.

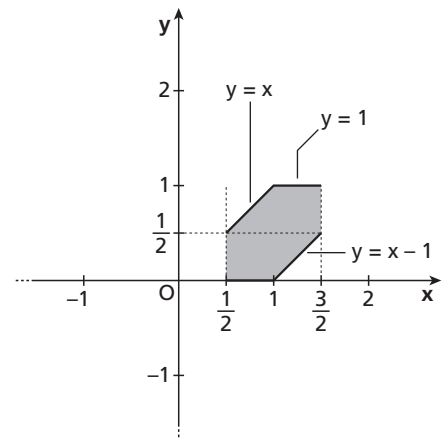
Ricordiamo che il volume del solido ottenuto ruotando di un angolo  $\alpha$  in radianti intorno all'asse  $x$  una regione di piano compresa tra due funzioni  $h(x)$  e  $l(x)$ , con  $h(x)$  al di sopra di  $l(x)$ , è:

$$V_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot V_{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi \int_a^b [h^2(x) - l^2(x)] dx.$$

Nel nostro caso:  $\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{12}$ .

Quindi:

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} [1^2 - (x-1)^2] dx \right\} =$$



■ Figura 5

$$\frac{\pi}{12} \cdot \left[ \frac{7}{24} + \left( \frac{9}{4} - \frac{27}{24} - 1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

In maniera alternativa, si può calcolare il volume  $V$  richiesto tramite le formule della geometria solida. Osservato infatti che il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse  $x$  della regione in figura è costituito:

- da un tronco di cono di altezza  $\frac{1}{2}$  e raggi di base  $\frac{1}{2}$  e  $1$ ,
- a cui è aggiunto un cilindro di altezza  $\frac{1}{2}$  e raggio di base  $1$ ,
- e da cui è sottratto un cono di altezza  $\frac{1}{2}$  e raggio di base  $\frac{1}{2}$ ,

risulta:

$$V = \frac{1}{12}(V_{\text{tronco cono}} + V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}) = \frac{1}{12} \left\{ \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1^2 \right] + \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \frac{\pi}{12} \left( \frac{7}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{18}{24} = \frac{\pi}{16}.$$

#### 4. Consideriamo la funzione:

$$h(x) = a + b \sin(cx + d) \text{ con } a, b, c, d \text{ parametri reali.}$$

Prima di impostare il sistema con le condizioni richieste, osserviamo che:

- $\min g =$  minimo della funzione  $g = 0$ ;
- $\sup g =$  estremo superiore della funzione  $g = 1$ ;
- $\min h = a - |b|$ ;
- $\max h = a + |b|$ ;
- $h'(x) = bc \cdot \cos(cx + d)$ ;
- $h''(x) = -bc^2 \cdot \sin(cx + d)$ .

Inoltre osserviamo che la funzione  $h(x)$  ha minimo  $0$  e massimo  $1$ , quindi non può essere una funzione costante.

Dalle prime due condizioni richieste ricaviamo i possibili valori di  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} \min g = \min h \\ \sup g = \max h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = a - |b| \\ 1 = a + |b| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = |b| \\ 1 = a + a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |b| = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \vee b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$2h'' + 2h - 1 = 0 \rightarrow -2bc^2 \cdot \sin(cx + d) + 2[a + b \sin(cx + d)] - 1 = 0 \rightarrow$$

$$-2bc^2 \cdot \sin(cx + d) + 2a + 2b \sin(cx + d) - 1 = 0 \rightarrow$$

$$2b(1 - c^2) \sin(cx + d) + 2a - 1 = 0 \rightarrow 2b(1 - c^2) \sin(cx + d) = 0.$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{0 \text{ perché } a = \frac{1}{2}}$$

Affinché la funzione  $2b(1 - c^2) \sin(cx + d)$  sia costantemente nulla, visto che il coefficiente  $b$  è diverso da zero, deve essere nullo il coefficiente  $1 - c^2$  oppure l'argomento del seno  $cx + d$ .

Esaminiamo i due casi.

- Se  $1 - c^2 = 0$ , allora  $c = -1 \vee c = 1$ .

$$\text{Otteniamo i parametri: } a = \frac{1}{2}; \quad b = \pm \frac{1}{2}; \quad c = \pm 1; \quad d \in \mathbb{R}.$$

In particolare, non abbiamo nessuna limitazione sul parametro  $d$ , che può assumere qualunque valore. Quindi, le funzioni sono infinite.

- Se  $cx + d = 0$  al variare di  $x$ , allora  $c = 0 \wedge d = 0$ . Ma non può essere  $c = 0$ , altrimenti la funzione  $h(x) = a + b \sin(d)$  sarebbe costante.

## QUESTIONARIO

- 1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 3 Vedi lo svolgimento del quesito 3 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 6 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 7 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 8 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.
- 9 Nell'intervallo  $[4; 9]$  la funzione  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  è definita e continua. L'area della regione  $R$  sottesa alla curva di equazione  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  nell'intervallo  $[4; 9]$  è data dall'integrale:

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_4^9 = [2\sqrt{x}]_4^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2.$$

Se la retta verticale di equazione  $x = k$ , con  $4 < k < 9$ , divide  $R$  in due parti di ugual area, allora ciascuna di tali parti ha area 1. Per determinare  $k$ , imponiamo allora la condizione:

$$\int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 \rightarrow [2\sqrt{x}]_4^k = 1 \rightarrow 2\sqrt{k} - 2\sqrt{4} = 1 \rightarrow \sqrt{k} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \frac{25}{4} \text{ che è un valore accettabile perché } 4 < \frac{25}{4} < 9.$$

- 10 Data la funzione

$$y = k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x + \varphi),$$

calcoliamo le sue derivate:

$$y' = -k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x + \varphi) + k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x + \varphi) = k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x + \varphi) - \sin(x + \varphi)];$$

$$y'' = -k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x + \varphi) - \sin(x + \varphi)] + k \cdot e^{-x} \cdot [-\sin(x + \varphi) - \cos(x + \varphi)] \rightarrow$$

$$y'' = -2k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x + \varphi).$$

Sostituiamo le funzioni nell'equazione differenziale data:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \rightarrow$$

$$-2k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x + \varphi) + 2k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x + \varphi) - \sin(x + \varphi)] + 2k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x + \varphi) = 0 \rightarrow$$

$$2k \cdot e^{-x} \cdot [-\cancel{\cos(x + \varphi)} + \cancel{\cos(x + \varphi)} - \cancel{\sin(x + \varphi)} + \cancel{\sin(x + \varphi)}] \rightarrow 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi la funzione  $y(x)$  assegnata è soluzione dell'equazione differenziale per ogni  $k$  e per ogni  $\varphi$ .

Determiniamo  $\varphi$  e  $k$  in modo che  $y(x)$  abbia un massimo in  $(0; 1)$ .

Innanzitutto deve essere:

$$y(0) = 1 \rightarrow k \cdot e^{-0} \cdot \sin(0 + \varphi) = 1 \rightarrow k \sin \varphi = 1.$$

Possiamo supporre  $k \neq 0$ , altrimenti l'uguaglianza non sarebbe verificata, quindi possiamo scrivere:

$$\sin \varphi = \frac{1}{k}.$$

Affinché in  $(0; 1)$  ci sia un massimo, deve essere:

- $y'(0) = 0$ , così che  $x = 0$  sia un punto estremante;
- $y''(0) < 0$ , così che la concavità in  $x = 0$  sia rivolta verso il basso.

Imponiamo le due condizioni:

$$y'(0) = 0 \rightarrow k \cdot e^{-0} \cdot [\cos(0 + \varphi) - \sin(0 + \varphi)] = 0 \rightarrow k[\cos \varphi - \sin \varphi] = 0 \rightarrow$$

$$k\left[\cos \varphi - \frac{1}{k}\right] = 0 \rightarrow k \cos \varphi - 1 = 0 \rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{k}.$$

$$y''(0) < 0 \rightarrow -2k \cdot e^{-0} \cdot \cos(0 + \varphi) < 0 \rightarrow -2k \cdot \cos \varphi < 0 \rightarrow -2k \cdot \frac{1}{k} < 0 \rightarrow$$

$$-2 < 0 \text{ sempre verificata.}$$

Dalle due condizioni trovate  $\sin \varphi = \frac{1}{k}$  e  $\cos \varphi = \frac{1}{k}$  deduciamo che i valori di seno e coseno della fase  $\varphi$  devono essere uguali, quindi  $\varphi$  deve essere l'angolo  $\frac{\pi}{4} + 2h\pi$  oppure l'angolo  $\frac{5\pi}{4} + 2h\pi$ , con  $h \in \mathbb{Z}$ .

Se  $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2h\pi$ , con  $h \in \mathbb{Z}$ , è  $k = \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{2}$  e la funzione cercata è:

$$y = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + 2h\pi\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Se  $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2h\pi$ , con  $h \in \mathbb{Z}$ , è  $k = \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = -\sqrt{2}$  e la funzione cercata è:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4} + 2h\pi\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

Osserviamo che le due funzioni trovate coincidono. Infatti:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$