Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

Lo studente risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

Consideriamo la funzione $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P;\, y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

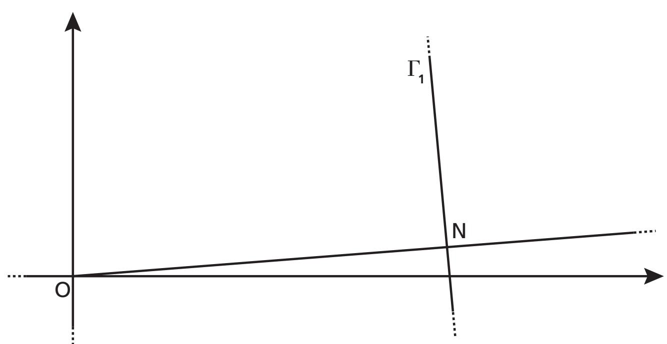


Figura 1

PROBLEMA 2

Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \le x\} \text{ e } g(x) = x - f(x).$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3$, $g(4{,}79) = 0{,}79$.

1. A partire dalle definizioni delle funzioni f e g, mostra che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $0 \le g(x) < 1$.
   Disegna i grafici delle funzioni f e g determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione g è periodica di periodo 1, calcola la media di g nell'intervallo $[0;\, n]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Calcola inoltre la media di g nell'intervallo $\left[0;\, n + \frac{1}{2}\right]$, e determina il limite a cui tale media tende per $n \to \infty$.

3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\frac{\pi}{6}$ radianti intorno all'asse x della regione di piano delimitata dai grafici di f e g nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni[1]

$$\min g = \min h, \quad \sup g = \max h, \quad 2h'' + 2h - 1 = 0.$$

Quante sono le funzioni siffatte?

QUESTIONARIO

1 Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

2 Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

3 Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

4 Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

5 Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura: Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

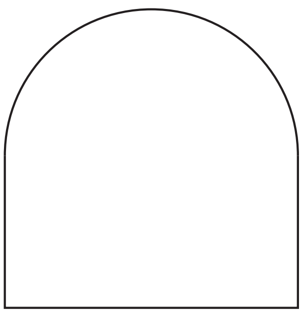


Figura 2

6 Determinare a in modo che $\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)\,dx$ sia uguale a 10.

7 In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano.
Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

8 Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

9 Trovare l'area R della regione di spazio racchiusa dalla curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, per $4 \leq x \leq 9$.

Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k.

10 Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k, la funzione $y = ke^{-x}\sin(x + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate (0; 1).

---

1. $\min g$ = minimo della funzione g, $\sup g$ = estremo superiore della funzione g, $\max h$ = minimo della funzione h.

Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 1

Vedi lo svolgimento del problema 2 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

PROBLEMA 2

1. Se il numero x è intero, allora il numero stesso coincide con la sua parte intera, cioè $f(x)=x$, e per la mantissa otteniamo:

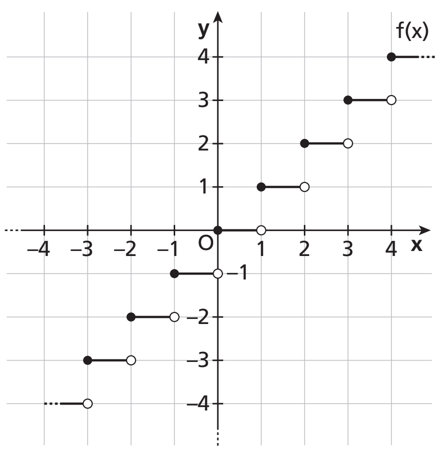
$$g(x)=x-f(x)=x-x=0.$$

Se il numero x non è intero vale la catena di disuguaglianze $x-1<f(x)<x$, che permette di ottenere la seguente limitazione per la mantissa:

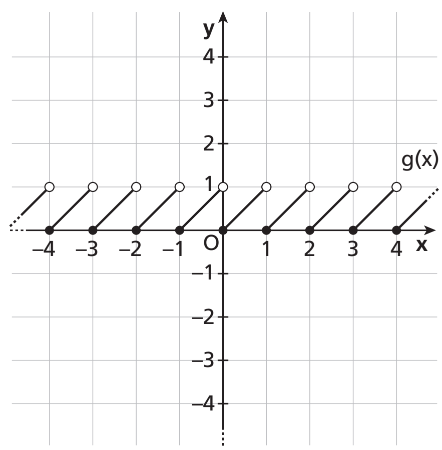
$$g(x)=x-f(x)\ \rightarrow\ x-\underbrace{x}_{\text{perché } f(x)<x}<g(x)<x-\underbrace{(x-1)}_{\text{perché } x-1<f(x)}\ \rightarrow\ 0<g(x)<1.$$

Risulta quindi $0\le g(x)<1$ per ogni numero reale x.

Disegniamo separatamente i due grafici della funzione parte intera $f(x)$ e della funzione mantissa $g(x)$.



■ Figura 3



■ Figura 4

Entrambe le funzioni presentano una discontinuità di prima specie (un salto di ampiezza 1) nei punti di ascissa intera. In particolare, per ogni α intero, sia $f(x)$ sia $g(x)$ risultano continue a destra in $x=\alpha$ e discontinue a sinistra:

$$f(\alpha)=\alpha;\quad \lim_{x\to\alpha^-} f(x)=f(\alpha)-1=\alpha-1;$$

$$g(\alpha)=0;\quad \lim_{x\to\alpha^-} g(x)=\lim_{x\to\alpha^-}[x-f(x)]=\alpha-(\alpha-1)=1.$$

2. La funzione mantissa $g(x)$ è periodica di periodo 1. Infatti, dalla definizione di parte intera di un numero discende che per ogni x reale è $f(x+1)=f(x)+1$, da cui:

$$g(x+1)=x+1-f(x+1)=x+1-[f(x)+1]=x-f(x)=g(x).$$

Verifichiamo che non esiste un altro valore T, con $0<T<1$, che possa costituire il periodo di $g(x)$. Se un tale T esistesse, si avrebbe infatti:

$$g(x+T)=g(x)\forall x\in\mathbb{R} \to x+T-f(x+T)=x-f(x) \to T=f(x+T)-f(x).$$

Poiché $0<T<1$ per ipotesi, si hanno due possibilità:

$$f(x+T)=f(x) \to f(x+T)-f(x)=0 \to T=0, \text{ impossibile},$$

oppure:

$$f(x+T)=f(x)+1 \to f(x+T)-f(x)=1 \to T=1, \text{ impossibile}.$$

La funzione mantissa $g(x)$ è dunque periodica di periodo 1. Nell'intervallo [0;1[la funzione è definita tramite l'identità $g(x)=x$.

Per calcolare la media $\overline{n}=\frac{1}{n}\int_0^n g(x)dx$ di $g(x)$ su un intervallo $[0; n]$, con n naturale non nullo, osserviamo che $g(x)$ ha un numero n finito di punti di discontinuità sull'intervallo $[0; n]$ e che è integrabile in senso improprio in [0; 1]. Infatti:

$$\int_0^1 g(x)dx=\lim_{z\to 1^-}\int_0^z g(x)dx=\lim_{z\to 1^-}\int_0^z xdx=\lim_{z\to 1^-}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^z=\lim_{z\to 1^-}\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}.$$

Sfruttando la periodicità di g, otteniamo:

$$\overline{n}=\frac{1}{n}\cdot n\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}.$$

La media $\overline{n}'$ sull'intervallo $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ è data da:

$$\overline{n}'=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} xdx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4},$$

mentre la media $\overline{n}'$ sull'intervallo $\left[0; n+\frac{1}{2}\right]$, con n naturale non nullo, è data da:

$$\overline{n}'=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{n+\frac{1}{2}} g(x)dx=\frac{2}{2n+1}\left[\int_0^n g(x)dx+\int_n^{n+\frac{1}{2}} g(x)dx\right]=\frac{2}{2n+1}\left[n\int_0^1 g(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx\right]=$$

$$\frac{2}{2n+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{4(2n+1)}=\frac{4n+1}{8n+4}.$$

Tale media, per $n\to+\infty$, tende a:

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{n}'=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{8n+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

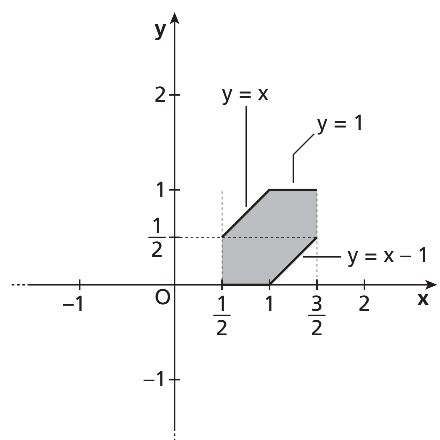
3. Rappresentiamo in figura la regione da ruotare.
Ricordiamo che il volume del solido ottenuto ruotando di un angolo α in radianti intorno all'asse x una regione di piano compresa tra due funzioni $h(x)$ e $l(x)$, con $h(x)$ al di sopra di $l(x)$, è:

$$V_\alpha=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot V_{2\pi}=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\pi\int_a^b[h^2(x)-l^2(x)]dx.$$

Nel nostro caso: $\alpha=\frac{\pi}{6}\to\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{1}{12}$.

Quindi:

$$V_{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx+\int_1^{\frac{3}{2}}[1^2-(x-1)^2]dx\right\}=$$



■ Figura 5

$$\frac{\pi}{12}\cdot\left[\frac{7}{24}+\left(\frac{9}{4}-\frac{27}{24}-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\pi}{16}.$$

In maniera alternativa, si può calcolare il volume V richiesto tramite le formule della geometria solida. Osservato infatti che il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione in figura è costituito:

- da un tronco di cono di altezza $\frac{1}{2}$ e raggi di base $\frac{1}{2}$ e 1,
- a cui è aggiunto un cilindro di altezza $\frac{1}{2}$ e raggio di base 1,
- e da cui è sottratto un cono di altezza $\frac{1}{2}$ e raggio di base $\frac{1}{2}$,

risulta:

$$V=\frac{1}{12}(V_{tronco\ cono}+V_{cilindro}-V_{cono})=\frac{1}{12}\left\{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 1+1^2\right]+\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=$$

$$\frac{\pi}{12}\left(\frac{7}{24}+\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{18}{24}=\frac{\pi}{16}.$$

4. Consideriamo la funzione:

$h(x)=a+b\sin(cx+d)$ con a, b, c, d parametri reali.

Prima di impostare il sistema con le condizioni richieste, osserviamo che:

- $\min g$ = minimo della funzione $g=0$;
- sup g = estremo superiore della funzione $g=1$;
- $\min h=a-|b|$;
- $\max h=a+|b|$;
- $h'(x)=bc\cdot\cos(cx+d)$;
- $h''(x)=-bc^2\cdot\sin(cx+d)$.

Inoltre osserviamo che la funzione $h(x)$ ha minimo 0 e massimo 1, quindi non può essere una funzione costante.
Dalle prime due condizioni richieste ricaviamo i possibili valori di a e b:

$$\begin{cases}\min g=\min h\\ \sup g=\max h\end{cases}\to\begin{cases}0=a-|b|\\ 1=a+|b|\end{cases}\to\begin{cases}a=|b|\\ 1=a+a\end{cases}\to\begin{cases}|b|=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\vee b=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

$$2h''+2h-1=0\ \to\ -2bc^2\cdot\sin(cx+d)+2[a+b\sin(cx+d)]-1=0\ \to$$

$$-2bc^2\cdot\sin(cx+d)+2a+2b\sin(cx+d)-1=0\ \to$$

$$2b(1-c^2)\sin(cx+d)+\underbrace{2a-1}_{0\text{ perché }a=\frac{1}{2}}=0\ \to\ 2b(1-c^2)\sin(cx+d)=0.$$

Affinché la funzione $2b(1-c^2)\sin(cx+d)$ sia costantemente nulla, visto che il coefficiente b è diverso da zero, deve essere nullo il coefficiente $1-c^2$ oppure l'argomento del seno $cx+d$.
Esaminiamo i due casi.

- Se $1-c^2=0$, allora $c=-1\vee c=1$.

  Otteniamo i parametri: $a=\frac{1}{2}$; $b=\pm\frac{1}{2}$; $c=\pm 1$; $d\in\mathbb{R}$.

  In particolare, non abbiamo nessuna limitazione sul parametro d, che può assumere qualunque valore. Quindi, le funzioni sono infinite.

- Se $cx+d=0$ al variare di x, allora $c=0 \wedge d=0$. Ma non può essere $c=0$, altrimenti la funzione $h(x)=a+b\sin(d)$ sarebbe costante.

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

3 Vedi lo svolgimento del quesito 3 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

6 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

7 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

8 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate e per il Liceo Scientifico - Indirizzo Sportivo, sessione ordinaria 2018.

9 Nell'intervallo [4; 9] la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ è definita e continua. L'area della regione R sottesa alla curva di equazione $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo [4; 9] è data dall'integrale:

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_4^9=[2\sqrt{x}]_4^9=2\sqrt{9}-2\sqrt{4}=2\cdot 3-2\cdot 2=6-4=2.$$

Se la retta verticale di equazione $x=k$, con $4<k<9$, divide R in due parti di ugual area, allora ciascuna di tali parti ha area 1. Per determinare k, imponiamo allora la condizione:

$$\int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}}dx=1 \rightarrow [2\sqrt{x}]_4^k=1 \rightarrow 2\sqrt{k}-2\sqrt{4}=1 \rightarrow \sqrt{k}=\frac{5}{2} \rightarrow k=\frac{25}{4}$$ che è un valore accettabile perché $4<\frac{25}{4}<9$.

10 Data la funzione

$$y=k\cdot e^{-x}\cdot\sin(x+\varphi),$$

calcoliamo le sue derivate:

$$y'=-k\cdot e^{-x}\cdot\sin(x+\varphi)+k\cdot e^{-x}\cdot\cos(x+\varphi)=k\cdot e^{-x}\cdot[\cos(x+\varphi)-\sin(x+\varphi)];$$

$$y''=-k\cdot e^{-x}\cdot[\cos(x+\varphi)-\sin(x+\varphi)]+k\cdot e^{-x}\cdot[-\sin(x+\varphi)-\cos(x+\varphi)] \rightarrow$$

$$y''=-2k\cdot e^{-x}\cdot\cos(x+\varphi).$$

Sostituiamo le funzioni nell'equazione differenziale data:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \;\rightarrow$$

$$-2k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x+\varphi) + 2k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x+\varphi) - \sin(x+\varphi)] + 2k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x+\varphi) = 0 \;\rightarrow$$

$$2k \cdot e^{-x} \cdot [-\cancel{\cos(x+\varphi)} + \cancel{\cos(x+\varphi)} - \cancel{\sin(x+\varphi)} + \cancel{\sin(x+\varphi)}] \;\rightarrow\; 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi la funzione $y(x)$ assegnata è soluzione dell'equazione differenziale per ogni k e per ogni φ.
Determiniamo φ e k in modo che $y(x)$ abbia un massimo in (0; 1).
Innanzi tutto deve essere:

$$y(0) = 1 \;\rightarrow\; k \cdot e^{-0} \cdot \sin(0+\varphi) = 1 \;\rightarrow\; k \sin\varphi = 1.$$

Possiamo supporre $k \neq 0$, altrimenti l'uguaglianza non sarebbe verificata, quindi possiamo scrivere:

$$\sin\varphi = \frac{1}{k}.$$

Affinché in (0; 1) ci sia un massimo, deve essere:

- $y'(0) = 0$, così che $x = 0$ sia un punto estremante;
- $y''(0) < 0$, così che la concavità in $x = 0$ sia rivolta verso il basso.

Imponiamo le due condizioni:

$$y'(0) = 0 \;\rightarrow\; k \cdot e^{-0} \cdot [\cos(0+\varphi) - \sin(0+\varphi)] = 0 \;\rightarrow\; k[\cos\varphi - \sin\varphi] = 0 \;\rightarrow$$

$$k\left[\cos\varphi - \frac{1}{k}\right] = 0 \;\rightarrow\; k\cos\varphi - 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos\varphi = \frac{1}{k}.$$

$$y''(0) < 0 \;\rightarrow\; -2k \cdot e^{-0} \cdot \cos(0+\varphi) < 0 \;\rightarrow\; -2k \cdot \cos\varphi < 0 \;\rightarrow\; -2k \cdot \frac{1}{k} < 0 \;\rightarrow$$

$$-2 < 0 \text{ sempre verificata.}$$

Dalle due condizioni trovate $\sin\varphi = \frac{1}{k}$ e $\cos\varphi = \frac{1}{k}$ deduciamo che i valori di seno e coseno della fase φ devono essere uguali, quindi φ deve essere l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2h\pi$ oppure l'angolo $\frac{5\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$.

Se $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, è $k = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{2}$ e la funzione cercata è:

$$y = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + 2h\pi\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Se $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, è $k = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = -\sqrt{2}$ e la funzione cercata è:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4} + 2h\pi\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

Osserviamo che le due funzioni trovate coincidono. Infatti:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$