Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di $12\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.

1. Determina l'espressione della funzione $h(t)$, che rappresenta il livello h (in cm) raggiunto dall'olio all'istante t (in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.
2. Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.
3. Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio l_A, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione $V(l_A)$ da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.
4. A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R, a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

PROBLEMA 2

La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita:

$$f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x).$$

1. Dimostra che f è una funzione dispari, che per $x \in]0; \pi]$ si ha $f(x) > 0$ e che esiste un solo valore $x_0 \in]0; 2\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x \in [0; 5\pi]$.
2. Determina il valore dell'integrale definito:

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

   e, sapendo che risulta:

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

   prova che risulta verificata la disequazione:

   $$\pi^3 + 18\pi < 96$$

   anche non conoscendo il valore di π.

3. Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = 4, \qquad \int_0^{2n\pi} f(x)dx = 0.$$

4. Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

QUESTIONARIO

1 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\ln(\cos^2(x))}.$$

2 In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia?

3 Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.

4 Dati i punti $A(2; 4; -8)$ e $B(-2; 4; -4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.

5 Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?

6 In un semicerchio di raggio $r = 10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?

7 Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione esplicitando il procedimento seguito:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n}.$$

8 Data la funzione $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$, sia g la retta passante per i punti $A(0; 8)$ e $B(2; 0)$.
Si calcoli l'area della regione colorata indicata in figura 1.

9 Dati i punti $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(1; 1; 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

10 Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y.

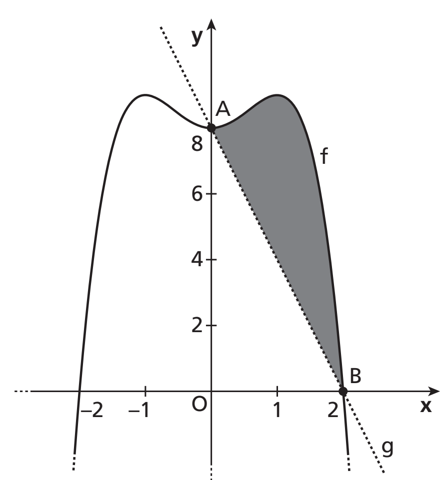

Figura 1

PROBLEMA 1

1. Per evitare ambiguità, diversamente dal testo del problema, indichiamo con le lettere maiuscole H e R rispettivamente l'altezza di 12 cm e il raggio di 4 cm del serbatoio a forma di cono, e con le lettere minuscole $h(t)$ e $r(t)$ rispettivamente l'altezza e il raggio del cono individuato dalla parte di serbatoio riempito all'istante t.

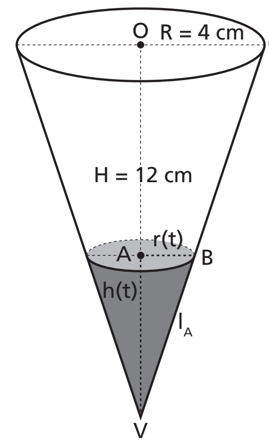

Figura 2

Per la similitudine dei triangoli VAB e VOC, è:

$$\overline{VA} : \overline{AB} = \overline{VO} : \overline{OC} \rightarrow h(t) : r(t) = 12 : 4 \rightarrow h(t) = 3r(t).$$

L'olio è versato alla velocità $q = 12\pi$ cm^3/s, quindi in t secondi vengono versati $Q = 12\pi t$ cm^3 di olio. Imponiamo che il volume del cono di altezza $h(t)$ e raggio $r(t)$ sia uguale a Q:

$$\frac{1}{3}h(t)\cdot\pi[r(t)]^2 = Q \rightarrow \frac{1}{3}\cdot 3r(t)\cdot\pi[r(t)]^2 = 12\pi t \rightarrow$$

$$[r(t)]^3 = 12t \rightarrow r(t) = \sqrt[3]{12t}.$$

Sempre per l'equivalenza $h(t) = 3r(t)$, risulta:

$$h(t) = 3\sqrt[3]{12t}, \text{ con } t \geq 0.$$

La velocità di crescita del livello dell'olio è espressa dalla derivata prima della funzione $h(t)$:

$$h'(t) = D\left[3(12t)^{\frac{1}{3}}\right] = 3\cdot\frac{1}{3}(12t)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 12 = 12(12t)^{-\frac{2}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{(12t)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{12t}}{\sqrt[3]{12t}} = \frac{\sqrt[3]{12t}}{t}.$$

2. Il 75% dell'altezza del serbatoio corrisponde a:

$$\frac{75}{100}H = \frac{3}{4}\cdot 12 = 9 \text{ cm}.$$

L'olio raggiunge tale livello dopo un tempo t_R dato da:

$$3\sqrt[3]{12t_R} = 9 \rightarrow \sqrt[3]{12t_R} = 3 \rightarrow 12t_R = 3^3 \rightarrow t_R = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ s}.$$

3. Indicato con $l_A = \overline{VB}$ il livello raggiunto dall'olio lungo l'apotema del cono, ricaviamo i corrispondenti valori di $h(t)$ e $r(t)$:

$$[h(t)]^2 + [r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow [3r(t)]^2 + [r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow 10[r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow$$

$$r(t) = \frac{l_A}{\sqrt{10}}, h(t) = \frac{3l_A}{\sqrt{10}}.$$

Il volume della parte di serbatoio occupato dall'olio, in funzione del livello l_A raggiunto, è:

$$V(l_A) = \frac{1}{3}\cdot h(t)\cdot\pi[r(t)]^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3l_A}{\sqrt{10}}\cdot\pi\cdot\left[\frac{l_A}{\sqrt{10}}\right]^2 = \frac{l_A}{\sqrt{10}}\cdot\pi\frac{l_A^2}{10} = \frac{\pi l_A^3}{10\sqrt{10}}.$$

4. L'apotema del serbatoio iniziale è lungo:

$$a^2 = H^2 + R^2 = 12^2 + 4^4 = 160 \rightarrow a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Nel nuovo serbatoio, sempre a forma di cono e con apotema a, l'altezza h e il raggio r devono essere tali che:

$$a^2 = h^2 + r^2 \;\rightarrow\; r^2 = a^2 - h^2 = 160 - h^2.$$

Il volume di tale serbatoio, in funzione dell'altezza h, è dato da:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{3} h(160 - h^2).$$

Determiniamo il valore di h che massimizza il volume.

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot [(160 - h^2) + h(-2h)] = \frac{\pi}{3} \cdot (160 - 3h^2),$$

$$V' = 0 \;\rightarrow\; 160 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \pm\sqrt{\frac{160}{3}} = \pm 4\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Poiché il grafico di V' è una parabola che volge la concavità verso il basso, V' è positivo per valori di h interni alle radici trovate e negativo per valori di h esterni. Considerata la limitazione $h > 0$ dovuta al contesto reale, otteniamo il seguente schema.

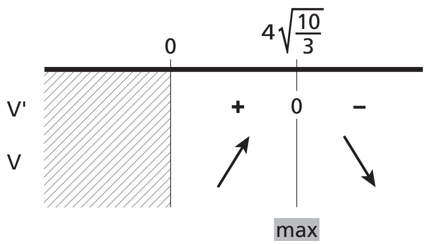

Figura 3

Il volume del nuovo cono è dunque massimo in corrispondenza di:

$$h = 4\sqrt{\frac{10}{3}} \simeq 7,30 \text{ cm}, \quad r = \sqrt{160 - h^2} = \sqrt{160 - \frac{160}{3}} = \sqrt{\frac{320}{3}} = 8\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 10,33 \text{ m}.$$

Rappresentiamo a lato il nuovo serbatoio. In questo caso, altezza e raggio sono legati dalla seguente relazione:

$$h : r = \overline{WD} : \overline{DE} \;\rightarrow$$

$$\overline{DE} = \frac{r}{h}\overline{WD} = 8\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{10}}\,\overline{WD} = \sqrt{2} \cdot \overline{WD}.$$

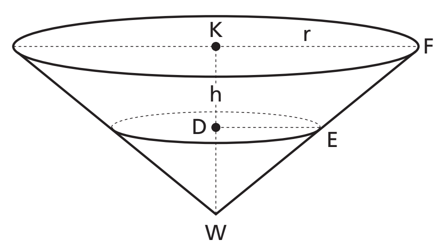

Figura 4

Nell'intervallo di tempo $t_R = 2,25$ s, con un flusso di riempimento pari a $q = 12\pi$ cm^3/s, il nuovo serbatoio si riempie di:

$$q \cdot t_R = 12\pi \cdot \frac{9}{4} = 27\pi \text{ cm}^3$$

di olio. Imponiamo che il cono di altezza WD e raggio DE abbia volume 27π cm^3:

$$\frac{1}{3}\overline{WD} \cdot \pi \overline{DE}^2 = 27\pi \;\rightarrow\; \overline{WD} \cdot 2\overline{WD}^2 = 81 \;\rightarrow\; \overline{WD}^3 = \frac{81}{2} \;\rightarrow\; \overline{WD} = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \simeq 3,43 \text{ cm}.$$

Quindi il nuovo serbatoio, in 2,25 s, si riempie fino a circa 3,43 cm di altezza.
Poiché:

$$h \cdot \frac{75}{100} = h \cdot \frac{3}{4} \simeq 7,30 \cdot \frac{3}{4} = 5,475 > 3,43,$$

il livello dell'olio in questo caso *non* raggiunge il 75% dell'altezza totale del serbatoio.

PROBLEMA 2

1. Considerata $f(x) = \sin x - x\cos x$, calcoliamo:

$$f(-x) = \sin(-x) - (-x)\cos(-x) = -\sin x + x\cos x = -(\sin x - x\cos x) = -f(x),$$

quindi la funzione $f(x)$ è dispari.
Determiniamo il segno della funzione ricorrendo allo studio della derivata prima:

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Osservato che $y = x$ e $y = \sin x$ sono positive in $]0; \pi[$, e $y = \sin x$ è nulla per $x = \pi$, otteniamo $f'(x) > 0$ in $]0; \pi[$ e $f'(\pi) = 0$. La funzione $f(x)$ è dunque crescente in $]0; \pi[$ e ha un punto stazionario in $x = \pi$. Poiché $f(0) = 0$, deduciamo che $f(x) > 0$ nell'intervallo $]0; \pi[$.

Per l'intervallo $]\pi; 2\pi[$ possiamo invece fare i seguenti ragionamenti: $f'(x) < 0$ in $]\pi; 2\pi[$ e $f'(2\pi) = 0$. La funzione $f(x)$ è dunque decrescente in $]\pi; 2\pi[$ e ha un punto stazionario in $x = 2\pi$, con $f(2\pi) = -2\pi$. Quindi $f(\pi) > 0$, $f(2\pi) < 0$ e $f(x)$ è decrescente in $]\pi; 2\pi[$: per il primo teorema di unicità dello zero, esiste un solo punto $x_0 \in]\pi; 2\pi[$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché $f(x)$ non ha zeri in $]0; \pi[$, rimane dimostrato che lo zero di $f(x)$ in $]0; 2\pi[$ è unico.
Per disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in [0; 5\pi]$, estendiamo a questo intervallo lo studio della crescenza e della decrescenza della funzione.

	0		π		2π		3π		4π		5π
f'	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0
f	0	↗	π	↘	–2π	↗	3π	↘	–4π	↗	5π

Figura 5

Osserviamo che i minimi e i massimi relativi della funzione $f(x)$ interni all'intervallo $[0; 5\pi]$ giacciono sulle rette di equazione rispettivamente $y = -x$ e $y = x$. Infatti i minimi relativi sono $(2\pi; -2\pi)$ e $(4\pi; -4\pi)$ e i massimi relativi sono $(\pi; \pi)$ e $(3\pi; 3\pi)$. Inoltre anche in $x = 0$ e in $x = 5\pi$, la tangente al grafico della funzione è orizzontale, essendo $f'(0) = f'(5\pi) = 0$. Con le informazioni note possiamo tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$, tralasciando lo studio della derivata seconda.

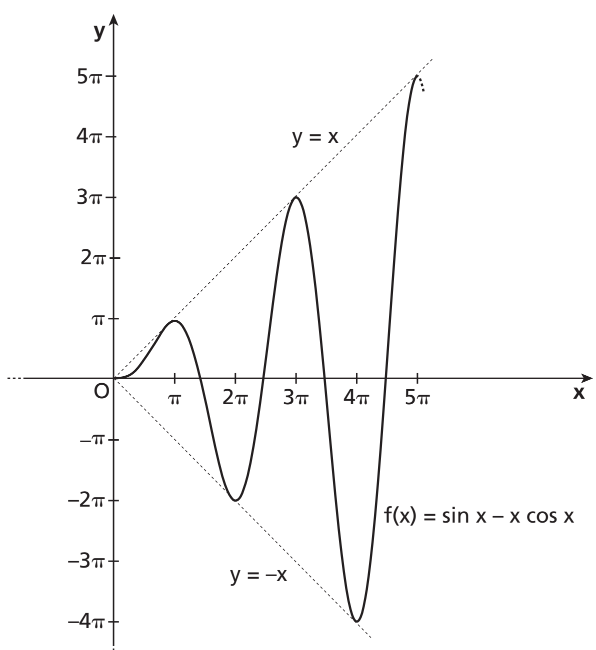

Figura 6

2. Prima di calcolare l'integrale definito, calcoliamo per parti l'integrale del termine $x\cos x$:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

L'integrale definito risulta allora:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x\cos x)dx = [-\cos x - (x\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-2\cos x - x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left(-2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (-2\cos 0 - 0\cdot\sin 0) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Per dimostrare la disuguaglianza $\pi^3 + 18\pi < 96$, osserviamo che in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $f(x)$ è crescente, con $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Risulta quindi $0 \le f(x) \le 1$ in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e pertanto $f^2(x) \le f(x)$ in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. In particolare è $f^2(x) < f(x)$ in $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Passando agli integrali otteniamo allora:

$$f^2(x) \le f(x) \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \to \frac{x^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2} \to$$

$$\frac{\pi^3 - 6\pi + 24\pi}{48} < \frac{96}{48} \to \pi^3 + 18\pi < 96.$$

3. Ricordando che, per il calcolo precedente, è $\int f(x)dx = -2\cos x - x\sin x + c$, otteniamo $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = [-2\cos x - x\sin x]_0^{(2n+1)\pi} =$$

$$[-2\cos[(2n+1)\pi] - (2n+1)\pi\cdot\sin[(2n+1)\pi]] - (-2\cos 0 - 0\cdot\sin 0) = +2+2 = 4;$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x)dx = [-2\cos x - x\sin x]_0^{2n\pi} =$$

$$[-2\cos 2n\pi - 2n\pi\cdot\sin 2n\pi] - (-2\cos 0 - 0\cdot\sin 0) = -2+2 = 0.$$

4. I ragionamenti fatti al punto 1 per la funzione $f(x)$ per l'intervallo $[0; 5\pi]$ si possono estendere a tutto $\mathbb{R}$:
   - $f(x)$ si annulla in $x = 0$ e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo $]k\pi; (k+1)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$;
   - $f(x)$ presenta minimi o massimi relativi in corrispondenza di $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $|f(k\pi)| = |k|\pi$.

   Per la funzione $f^2(x)$ possiamo allora dire che:

   - $f^2(x) \ge 0$ su $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in $\mathbb{R}$;
   - $f^2(x)$ si annulla dove si annulla $f(x)$, quindi in $x = 0$ e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo $]k\pi; (k+1)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$;
   - $\mathrm{D}[f^2(x)] = 2f(x)\cdot f'(x)$, quindi i punti di massimo e minimo relativi vanno cercati tra gli zeri di $f(x)$ e di $f'(x)$. Gli zeri di $f(x)$ sono punti di minimo di $f^2(x)$, quindi i massimi relativi di $f^2(x)$ sono tra gli zeri di $f'(x)$. In particolare, $f^2(x)$ presenta massimi relativi in corrispondenza di $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $f^2(k\pi) = (k\pi)^2$.

   Dunque i minimi di $f^2(x)$ giacciono sull'asse delle ascisse, mentre i massimi di $f^2(x)$ giacciono sulla parabola di equazione $y = x^2$.

QUESTIONARIO

1 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ poiché sia il numeratore $f(x) = \sin(\cos x - 1)$ sia il denominatore $g(x) = \ln(\cos^2 x)$ tendono a 0 quando x tende a 0. Possiamo applicare il teorema di De L'Hospital in quanto:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in un opportuno intorno I di $x = 0$, con $f(0) = g(0) = 0$;
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I - \{0\}$, con $f'(x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x - 1)$ e

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\sin x) = -\frac{2\sin x}{\cos x} \neq 0 \text{ in } I - \{0\}.$$

Applichiamo dunque il teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{\ln(\cos^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \left[-\sin x \cdot \cos(\cos x - 1) \cdot \left(-\frac{\cos x}{2\sin x} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\cos(\cos x - 1) \cdot \frac{\cos x}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

2 Indichiamo con $p = 0{,}04$ la probabilità che un passeggero non paghi il biglietto del tram.
Possiamo calcolare la probabilità che su 40 passeggeri di un tram nessuno sia senza biglietto mediante la distribuzione binomiale:

$$p(X = 0) = \binom{40}{0} p^0 (1-p)^{40} = 1 \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{40} = 0{,}96^{40},$$

dove X indica la variabile casuale «numero di passeggeri senza biglietto».
La probabilità che almeno un passeggero sia senza biglietto è data dalla probabilità complementare:

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}96^{40} \simeq 0{,}80.$$

Se il numero di passeggeri raddoppia, la probabilità non può certo raddoppiare, dovendo rimanere minore o uguale a 1. Confermiamolo con il calcolo:

$$p(X = 0) = \binom{80}{0} p^0 (1-p)^{80} = 1 \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{80} = 0{,}96^{80},$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}96^{80} \simeq 0{,}96.$$

3 Consideriamo le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2 + 4x - a$. Affinché i loro grafici risultino tangenti in un punto, deve esistere un particolare valore di x tale che $f(x) = g(x)$ e $f'(x) = g'(x)$. Imponiamo tali condizioni:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = -x^2 + 4x - a \\ 2x = -2x + 4 \end{cases} \to \begin{cases} 1^2 = -1^2 + 4 \cdot 1 - a \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

In particolare, il parametro a deve valere 2. Inoltre $f(1) = g(1) = 1$. Quindi le due funzioni sono tangenti nel punto di coordinate $(1; 1)$.

4 Consideriamo i punti $A(2; 4; -8)$ e $B(-2; 4; -4)$.
La superficie sferica Σ, di diametro AB, ha centro C nel punto medio di AB:

$$C\left(\frac{2-2}{2}; \frac{4+4}{2}; \frac{-8-4}{2} \right) \to C(0; 4; -6).$$

Il raggio della superficie sferica è:

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (4-4)^2 + (-6+8)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

La superficie sferica ha dunque equazione:

$$(x-0)^2+(y-4)^2+(z+6)^2=8 \rightarrow x^2+y^2+16-8y+z^2+36+12z=8 \rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-8y+12z+44=0.$$

Il piano tangente alla superficie Σ passante per A è perpendicolare al raggio AC, il cui vettore di direzione è:

$$\overline{AC}(0-2;4-4;-6+8) \rightarrow \overline{AC}(-2;0;2).$$

Il piano tangente ha dunque equazione:

$$-2(x-2)+0\cdot(y-4)+2\cdot(z+8)=0 \rightarrow -2x+2z+20=0 \rightarrow x-z-10=0.$$

5 Indichiamo con C_1 e C_2 i due capannoni dove vengono prodotti gli scatoloni.
In C_1 vengono prodotte 600 scatole su un totale di 1000, cioè il 60%, e di queste il 3% è difettoso.
In C_2 vengono prodotte 400 scatole su un totale di 1000, cioè il 40%, e di queste il 2% è difettoso.
Rappresentiamo la situazione nel seguente diagramma ad albero (dove D indica il ramo delle scatole difettose e Q indica il ramo delle scatole che hanno superato il controllo qualità).

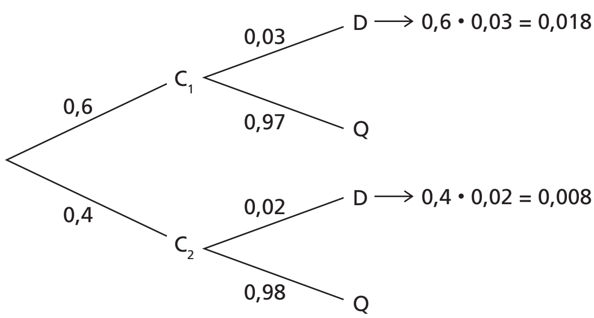

Figura 7

La probabilità che, avendo trovato una scatola difettosa, questa provenga dal secondo capannone, può essere calcolata con il teorema di Bayes:

$$p(C_2|D)=\frac{p(C_2)\cdot p(D|C_2)}{p(D)}=\frac{0,4\cdot 0,02}{0,018+0,008}=\frac{0,008}{0,026}\simeq 0,3077 \rightarrow 30,77\%.$$

6 Rappresentiamo la situazione in figura.

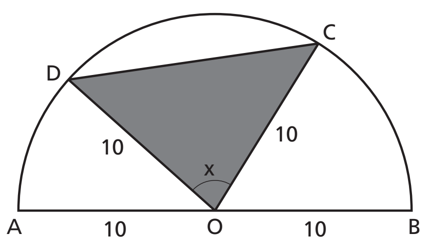

Figura 8

L'area del triangolo ODC è individuata dall'angolo x, con $0<x<\pi$. Infatti l'area del triangolo ODC è data da:

$$a(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OD}\cdot\sin COD=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\sin x=50\sin x.$$

Il triangolo ha area massima quando $\sin x=1$, quindi per $x=\frac{\pi}{2}$, e vale $a=50$.

In particolare, l'area è massima quando ODC è un triangolo rettangolo.

7 Riconduciamo il limite nella forma del limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot\frac{3}{n}\cdot(-n)} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

8 La retta g ha ordinata all'origine $q = y_A = 8$ e coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-8}{2-0} = -4,$$

quindi ha equazione:

$$y = -4x + 8.$$

Considerata la funzione $g(x) = -4x + 8$ corrispondente alla retta g, possiamo calcolare l'area della regione indicata nella figura del testo mediante l'integrale definito:

$$\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [-x^4 + 2x^2 + 8 + 4x - 8]dx = \int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 4x)dx =$$

$$\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 8\right) - 0 = \frac{-96 + 80 + 120}{15} = \frac{104}{15} \simeq 6{,}93.$$

9 Un generico piano nello spazio ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ con a, b e c numeri reali non tutti nulli; imponiamo il passaggio di tale piano per i punti $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(0; -1; -2)$:

$$\begin{cases} -2a + c + d = 0 \\ a + b + 2c + d = 0 \\ -b - 2c + d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2a + c + d = 0 \\ a + (-2c + d) + 2c + d = 0 \\ b = -2c + d \end{cases} \to \begin{cases} -2a + c + d = 0 \\ a + 2d = 0 \\ b = -2c + d \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} -2(-2d) + c + d = 0 \\ a = -2d \\ b = -2c + d \end{cases} \to \begin{cases} 5d + c = 0 \\ a = -2d \\ b = -2c + d \end{cases} \to \begin{cases} c = -5d \\ a = -2d \\ b = -2c + d \end{cases} \to \begin{cases} a = -2d \\ b = 11d \\ c = -5d \end{cases}.$$

Poiché possiamo scegliere arbitrariamente il valore di d, purché diverso da zero, poniamo $d = 1$ e otteniamo:

$$a = -2, \quad b = 11, \quad c = -5, \quad d = 1.$$

Il piano passante per A, B, C ha dunque equazione:

$$\alpha: -2x + 11y - 5z + 1 = 0.$$

Il vettore $\vec{v}(-2; 11; -5)$, formato dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano α, risulta perpendicolare al piano stesso e costituisce quindi il vettore di direzione delle rette ortogonali ad α. Fra tutte cerchiamo la retta r passante per $D(1; 1; 0)$, ricorrendo alle equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 11t, \ \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = -5t \end{cases}$$

Determiniamo le equazioni cartesiane della retta r:

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+11t \\ z = -5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1-x}{2} \\ t = \dfrac{y-1}{11} \\ t = -\dfrac{z}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y-1}{11} \\ \dfrac{1-x}{2} = -\dfrac{z}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11x+2y-13=0 \\ 5x-2z-5=0 \end{cases}.$$

10 Disegniamo nel piano cartesiano la regione R. Nel primo quadrante le due curve si incontrano per la prima volta nel punto (2; 4).

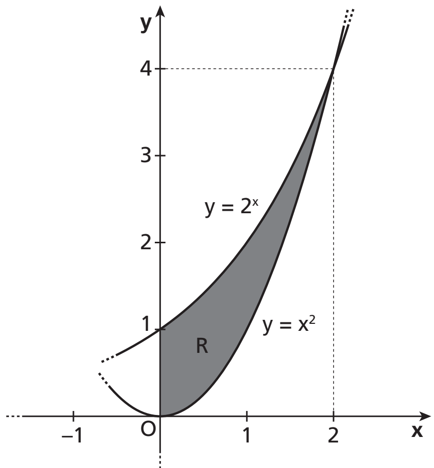

Figura 9

Il volume V_x del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle ascisse è dato dall'integrale definito:

$$V_x = \pi\int_0^2 (2^x)^2 dx - \pi\int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 4^x dx - \pi\int_0^2 x^4 dx =$$

$$\pi\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^2 - \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{4^2}{\ln 4} - \frac{4^0}{\ln 4}\right) - \pi\left(\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right) =$$

$$\pi\left(\frac{16}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} - \frac{32}{5}\right) = \pi\left(\frac{15}{\ln 4} - \frac{32}{5}\right) \simeq 13{,}89.$$

Per calcolare il volume V_y del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle ordinate, dobbiamo determinare prima l'espressione delle funzioni inverse:

$$y = 2^x \rightarrow y = (e^{\ln 2})^x \rightarrow y = e^{x\ln 2} \rightarrow \ln y = x\ln 2 \rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln 2}, \text{ con } 1 \le y \le 4;$$

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}, \text{ con } 0 \le y \le 4.$$

Il volume V_y è quindi dato da:

$$V_y = \pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy - \pi\int_1^4 \left(\frac{\ln y}{\ln 2}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 y\, dy - \frac{\pi}{\ln^2 2}\int_1^4 \ln^2 y\, dy.$$

Per procedere con il calcolo, sviluppiamo separatamente, per parti, l'integrale di $\ln^2 y$:

$$\int \ln^2 y\, dy = \int 1 \cdot \ln^2 y\, dy = y\ln^2 y - \int y \cdot 2\ln y \cdot \frac{1}{y} dy = y\ln^2 y - 2\int 1 \cdot \ln y\, dy =$$

$$y \ln^2 y = 2\left[y \ln y - \int y \cdot \frac{1}{y}\, dy\right] = y \ln^2 y - 2\left[y \ln y - \int 1\, dy\right] =$$

$$y \ln^2 y - 2[y \ln y - y] + c = y \ln^2 y - 2y \ln y + 2y + c.$$

Possiamo proseguire con il calcolo del volume:

$$V_y = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 - \frac{\pi}{\ln^2 2}[y \ln^2 y - 2y \ln y + 2y]_1^4 =$$

$$\pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \frac{\pi}{\ln^2 2}[(4 \cdot \ln^2 4 - 2 \cdot 4 \cdot \ln 4 + 2 \cdot 4) - (1 \cdot \ln^2 1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot 1)] =$$

$$8\pi - \frac{\pi}{\ln^2 2}(4 \cdot \ln^2 2^2 - 8 \cdot \ln 2^2 + 8 - 2) = 8\pi - \frac{\pi}{\ln^2 2}(4 \cdot 4 \cdot \ln^2 2 - 16 \cdot \ln 2 + 6) =$$

$$8\pi - \frac{\pi}{\ln^2 2}(16 \cdot \ln^2 2 - 16 \cdot \ln 2 + 6) \simeq 8{,}15.$$

Alternativamente, avremmo potuto calcolare il volume V_y in modo più veloce utilizzando il metodo dei gusci cilindrici che non richiede il calcolo delle funzioni inverse. Con questo metodo, il volume V_y è dato dall'integrale definito:

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x \cdot 2^x - x \cdot x^2 dx = 2\pi\left[\int_0^2 x \cdot 2^x dx - \int_0^2 x^3 dx\right].$$

Sviluppiamo separatamente, per parti, l'integrale di $x \cdot 2^x$.

$$\int x \cdot 2^x dx = \int x\mathrm{D}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right] dx = \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \int \frac{2x}{\ln 2} dx = \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + e.$$

Quindi:

$$V_y = 2\pi\left[\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\pi\left[\left(\frac{2 \cdot 2^2}{\ln 2} - \frac{2^2}{\ln^2 2} - \frac{1}{4} \cdot 2^4\right) - \left(0 - \frac{2^0}{\ln^2 2} - 0\right)\right] =$$

$$2\pi\left(\frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} - 4 + \frac{1}{\ln^2 2}\right) = 2\pi\left(\frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{\ln^2 2} - 4\right) \simeq 8{,}15.$$