PROVA D'ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2015

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 25)$ e $(4; 25)$; nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y=-\frac{25}{16}x^2+25$, $x\in[-4; 4]$, la seconda parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione $y=\frac{100}{4+x^2}$ e le rette $x=-2\sqrt{3}$, $x=2\sqrt{3}$.

a. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano Oxy. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

b. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x\in[-2\sqrt{3}; 0]$ che per $x\in[0; 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x)=|x|+1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

c. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, tale piano deve passare per i punti $(-4; 0; 5)$, $(4; 0; 5)$ e $(0; 25; 4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

d. Determina l'equazione del piano prescelto.

PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x)=\frac{x}{4k}\sqrt{k^2-x}, \quad \text{con } x\in\mathbb{R}, \quad 0\le x\le k^2, \quad k\in\mathbb{R}, \quad k>0,$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

a. In un riferimento cartesiano Oxy, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;

b. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;

c. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)^2]dx}{V},$$

dove gli estremi di integrazione a e b vanno scelti opportunamente, e V indica il volume del solido di rotazione;

d. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

QUESTIONARIO

1 Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t)dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

2 Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

3 Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che $P(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di X.

4 In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A(-3; 4; 0)$ e $C(-2; 1; 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.

5 Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.

6 Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.

7 Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

- la distribuzione binomiale;
- la distribuzione di Poisson.

8 Provare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - \arctan x$ non ne ha alcuno.

9 Calcolare la derivata $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

10 Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $P(2; -7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale 45°.

PROBLEMA 1

a. Studiamo le funzioni $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ e $g(x) = \frac{100}{4+x^2}$ nel dominio richiesto dal problema.

- $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ rappresenta una parabola simmetrica rispetto all'asse y con la concavità rivolta verso il basso e di vertice $V(0; 25)$. La funzione $p(x)$ è quindi è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ammette massimo assoluto in V.

  Nel dominio $[-4; 4]$ considerato, la curva assume minimo nei punti $A(-4; 0)$ e $D(4; 0)$, due dei vertici del rettangolo che dovrebbe contenere la pista.

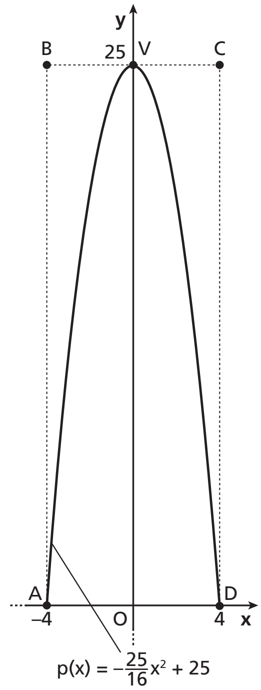


Figura 1

- $g(x) = \frac{100}{4+x^2}$ è razionale fratta, con denominatore $4 + x^2$ sempre positivo: il suo dominio naturale è $\mathbb{R}$. È una funzione pari, $g(-x) = \frac{100}{4+(-x)^2} = \frac{100}{4+x^2} = g(x)$, quindi simmetrica rispetto all'asse y. Il punto di intersezione tra l'asse y e il grafico di $g(x)$ coincide con il vertice $V(0; 25)$ della parabola.

  Non ci sono invece punti di intersezione tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x, in quanto $g(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  La derivata prima di $g(x)$ si può calcolare con la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$g'(x) = -\frac{100}{(4+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{200x}{(4+x^2)^2}.$$

  Il denominatore è sempre positivo; $g'(x)$ si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. Quindi $g(x)$ è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ha un punto di massimo sia relativo sia assoluto per $x = 0$, con $g(0) = 25$ (corrisponde al punto V).

  La derivata seconda è:

$$g''(x) = -200 \cdot \frac{(4+x^2)^2 - 4x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} = (3x^2 - 4) \cdot \frac{200}{(4+x^2)^3}.$$

  Il secondo fattore è sempre positivo, quindi il segno di $g''(x)$ è quello di $3x^2 - 4$. Risulta allora:

$$g''(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$g''(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x > \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

  Concludiamo che la concavità del grafico di $g(x)$ è rivolta verso il basso per $x \in \left]-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right[$, mentre è rivolta verso l'alto per x esterno a tale intervallo. Gli estremi $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ corrispondono a punti di flesso con tangente obliqua.

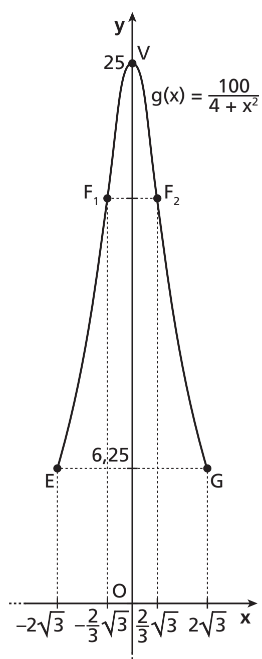


Figura 2

Calcoliamo il valore di $g(x)$ in tali punti:

$$g\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{75}{4} = 18{,}75.$$

Si ottengono i due flessi, simmetrici rispetto all'asse y: $F_{1,2}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{75}{4}\right)$. Nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, il grafico di $g(x)$ presenta dunque il massimo in V e due flessi. Negli estremi dell'intervallo, $x = \pm 2\sqrt{3}$, la funzione $g(x)$ assume il valore $g(-2\sqrt{3}) = g(2\sqrt{3}) = \frac{25}{4} = 6{,}25$ e il grafico presenta i due punti di minimo $E(-2\sqrt{3}; 6{,}25)$ e $G(2\sqrt{3}; 6{,}25)$.

b. L'area compresa tra il grafico della funzione $g(x)$, l'asse x e le due rette di equazioni $x = -2\sqrt{3}$ e $x = 2\sqrt{3}$ è data dall'integrale definito di $g(x)$ esteso all'intervallo $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

Cerchiamo la primitiva di $g(x)$:

$$\int \frac{100}{4+x^2}dx = 100\int \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}dx = 50\int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 50\arctan\frac{x}{2} + c.$$

Calcoliamo allora l'area, ovvero l'integrale definito:

$$\text{area} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}dx = \left[50\arctan\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} =$$

$$50\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan(-\sqrt{3})\right] = 50\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{100}{3}\pi \simeq 104{,}72.$$

L'area corrispondente alla soluzione scelta è dunque area = 104,72 m^2.
L'area del rettangolo che contiene la pista è $\text{area}_r = 8 \cdot 25 = 200$ m^2, quindi la porzione occupata dalla pista è $\frac{\text{area}}{\text{area}_r} = \frac{104{,}72}{200} \simeq 0{,}52 = 52\%$.

Essa risulta entro i limiti del 60% consentiti dal vincolo urbanistico: si può procedere alla costruzione.

c. Abbiamo già osservato che i massimi di $p(x)$ e $g(x)$ coincidono, essendo $p(0) = g(0) = 25$. Inoltre, i grafici di $p(x)$ e $g(x)$ si intersecano anche nei punti E e G, in quanto:

$$p(-2\sqrt{3}) = p(2\sqrt{3}) = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Per trovare quanto terreno serve per riempire l'aiuola che appartiene al secondo quadrante, è necessario calcolare il volume V del solido che ha:

- come base la superficie compresa tra le due curve, per $x \in [-2\sqrt{3}; 0]$;
- come sezioni, ottenute con i piani perpendicolari all'asse x, dei rettangoli di altezza $1 + |x|$ e base $p(x) - g(x)$.

Per la simmetria dei grafici, possiamo calcolare il volume nell'intervallo $[0; 2\sqrt{3}]$, in cui $x \geq 0$ e l'altezza è $1 + x$:

$$V = \int_{-2\sqrt{3}}^{0} [p(x) - g(x)](1 + |x|)dx = \int_{0}^{2\sqrt{3}} [p(x) - g(x)](1+x)dx =$$

$$\int_{0}^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right)(1+x)dx =$$

$$\int_{0}^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2} - \frac{25}{16}x^3 + 25x - \frac{100x}{4+x^2}\right)dx =$$

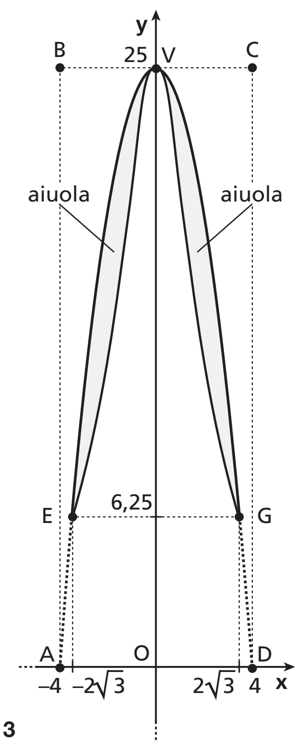


Figura 3

$$\left[-\frac{25}{48}x^3+25x-50\arctan\frac{x}{2}-\frac{25}{64}x^4+\frac{25}{2}x^2-50\ln(4+x^2)\right]_0^{2\sqrt{3}}=$$

$$\left(-\frac{25}{2}\sqrt{3}+50\sqrt{3}-\frac{50}{3}\pi-\frac{225}{4}+150-100\ln 2\right)=$$

$$\frac{375}{4}+\frac{75}{2}\sqrt{3}-\frac{100}{6}\pi-100\ln 2\simeq 37{,}03.$$

Servono allora 37,03 m^3 di terreno vegetale per riempire l'aiuola delimitata dalla curva nell'intervallo $[-2\sqrt{3}\,;0]$.

d. L'equazione cartesiana del generico piano è $ax+by+cz=d$, dove i coefficienti *a, b, c, d* sono determinati a meno di una costante moltiplicativa.

Imponendo il passaggio del piano per i tre punti $(-4;0;5)$, $(4;0;5)$ e $(0;25;4)$, otteniamo il sistema omogeneo di tre equazioni nelle incognite *a, b, c* e *d*:

$$\begin{cases}-4a+5c-d=0\\4a+5c-d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}8a=0\\10c-2d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\d=5c\\25b+4c-5c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\c=25b\\d=5c=125b\end{cases}.$$

Abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro, $b\in\mathbb{R}$.

Ponendo $b=1$, otteniamo il piano di equazione:

$$y+25z-125=0.$$

PROBLEMA 2

a. Il dominio naturale della funzione $f_k(x)$ è dato da: $x\le k^2$. Tuttavia, nella definizione data, si considera solo la restrizione di $f_k(x)$ all'intervallo $[0;k^2]$. Notiamo che tale intervallo non è lo stesso per ogni $k>0$, ma cresce in ampiezza al crescere di *k*.

Nel dominio $[0;k^2]$, le funzioni $f_k(x)$ sono continue e positive, tranne che agli estremi $x=0$ e $x=k^2$, dove si annullano: $f_k(0)=f_k(k^2)=0$ per ogni $k\in\mathbb{R}$.

Per individuare gli intervalli di crescita e decrescita di $f_k(x)$, calcoliamone la derivata prima:

$$f_k'(x)=\frac{1}{4k}\sqrt{k^2-x}+\frac{x}{4k}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{k^2-x}}\right)=\frac{\sqrt{k^2-x}}{4k}-\frac{x}{8k\sqrt{k^2-x}}=$$

$$\frac{2(k^2-x)-x}{8k\sqrt{k^2-x}}=\frac{2k^2-3x}{8k\sqrt{k^2-x}}.$$

La derivata $f_k'(x)$ è definita per $x\in[0;k^2[$.

Il segno di $f_k'(x)$ è lo stesso di $2k^2-3x$, perciò:

- $f_k'(x)=0\ \rightarrow\ 2k^2-3x=0\ \rightarrow\ x=\frac{2}{3}k^2$; la funzione ha un punto stazionario di ascissa $\frac{2}{3}k^2$;
- $f_k'(x)>0\ \rightarrow\ 2k^2-3x>0\ \rightarrow\ 0\le x<\frac{2}{3}k^2$.

La funzione $f_k(x)$ è quindi crescente per $0<x<\frac{2}{3}k^2$ e decrescente per $\frac{2}{3}k^2<x<k^2$. Il punto di ascissa $x=\frac{2}{3}k^2$ è di massimo assoluto, con:

$$f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}k^2.$$

Soffermiamoci su quanto avviene agli estremi del grafico. Osserviamo che $f_k'(0) = \frac{2k^2}{8k\sqrt{k^2}} = \frac{1}{4}$. La derivata destra è definita nell'estremo sinistro del dominio, $x = 0$, e vale $\frac{1}{4}$. Ciò significa che la retta tangente al grafico di $f_k(x)$ nel punto $(0; 0)$ non dipende dal valore di k, ma ha sempre equazione $y = \frac{1}{4}x$.
Invece, all'altro estremo del dominio, $x = k^2$, la derivata non è definita, ma è possibile calcolarne il limite da sinistra:

$$\lim_{x \to k^{2-}} f_k'(x) = \lim_{x \to k^{2-}} \frac{2k^2 - 3x}{8k\sqrt{k^2 - x}} = -\infty.$$

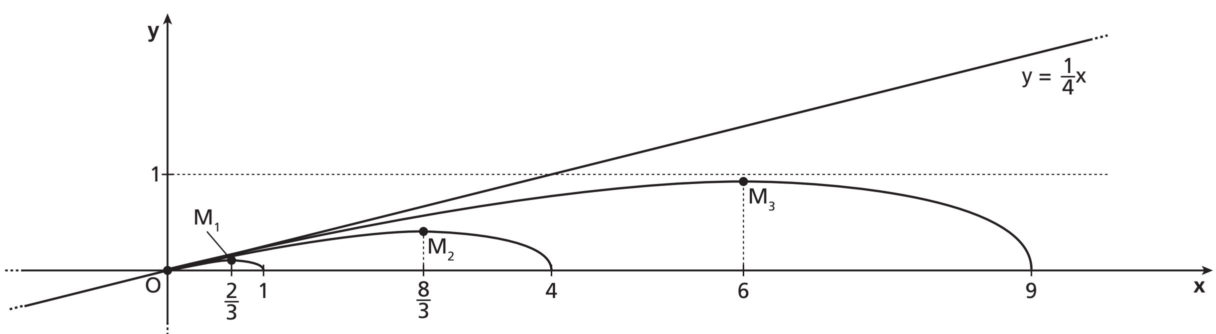
Poiché la funzione $f_k(x)$ è definita per $x = k^2$, concludiamo che il grafico di $f_k(x)$ ha una tangente verticale in corrispondenza del punto $(k^2; 0)$.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f_k''(x) = \frac{3x - 4k^2}{16k(\sqrt{k^2 - x})^3}.$$

Per $x \in [0; k^2[$, la derivata seconda è negativa per ogni valore di k, quindi la concavità di tutte le funzioni $f_k(x)$ è rivolta sempre verso il basso.

- La funzione $f_1(x) = \frac{\pi}{4}\sqrt{1 - x}$ ha dominio $[0; 1]$; cresce per $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$, decresce per $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$; ha un massimo per $x = \frac{2}{3}$, con $f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18} \simeq 0,1$.
- La funzione $f_2(x) = \frac{\pi}{8}\sqrt{4 - x}$ ha dominio $[0; 4]$; cresce per $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$, decresce per $x \in \left[\frac{8}{3}; 4\right]$; ha un massimo per $x = \frac{8}{3}$, con $f_2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3} \simeq 0,4$.
- La funzione $f_3(x) = \frac{\pi}{12}\sqrt{9 - x}$ ha dominio $[0; 9]$; cresce per $x \in [0; 6]$, decresce per $x \in [6; 9]$; ha un massimo per $x = 6$, con $f_3(6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,9$.

Chiamiamo M_1, M_2 e M_3 i punti dei grafici che corrispondono ai massimi delle tre funzioni.
Disegniamo il loro grafico, su un unico piano cartesiano Oxy.



■ **Figura 4**

Il volume del solido ottenuto facendo ruotare il grafico di $f_k(x)$ attorno all'asse x è espresso dall'integrale:

$$V = \pi\int_0^{k^2} f_k^2(x)dx = \pi\int_0^{k^2} \frac{x^2}{16k^2}(k^2 - x)dx = \frac{\pi}{16k^2} \cdot \int_0^{k^2}(k^2x^2 - x^3)dx =$$

$$\frac{\pi}{16k^2}\left[k^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{k^2} = \frac{\pi}{16k^2}\left(\frac{k^2 \cdot k^6}{3} - \frac{k^8}{4}\right) = \frac{\pi}{16} \cdot k^6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{192}k^6.$$

Imponiamo che il volume sia uguale a $\frac{64\pi}{192}$:

$$V = \frac{64\pi}{192} \rightarrow \frac{\pi}{192}k^6 = \frac{64\pi}{192} \rightarrow k^6 = 64 \rightarrow k = 2.$$

Il valore cercato è $k = 2$, che corrisponde alla funzione $f_2(x)$ studiata sopra.

b. Il diametro massimo del solido ottenuto dalla rotazione di $f_k(x)$ è uguale al doppio del massimo di $f_k(x)$, quindi:

$$D_{\max} = 2 \cdot f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}k^2.$$

Abbiamo anche visto che la tangente al grafico di $f_k(x)$ in $x = 0$ è la retta $y = \frac{1}{4}x$, indipendentemente da k.

L'angolo α che essa forma con l'asse x ha come tangente trigonometrica il coefficiente angolare della retta, cioè $\frac{1}{4}$, pertanto:

$$\alpha = \arctan\frac{1}{4} \simeq 0{,}245 \rightarrow \alpha \simeq 14°2'10''.$$

c. Per determinare l'ascissa x_S del baricentro, osserviamo che gli estremi di integrazione coincidono con quelli dell'intervallo di definizione di $f_k(x)$, cioè $a = 0$ e $b = k^2$. Ricordiamo che il volume V del solido, che abbiamo calcolato nel punto **a**, è $V = \frac{\pi k^6}{192}$. Dopo aver fatto le opportune sostituzioni, possiamo procedere al calcolo:

$$x_S = \frac{\pi\int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V} = \frac{192}{\pi k^6} \cdot \pi \cdot \int_0^{k^2} x \cdot \frac{x^2(k^2 - x)}{16k^2} dx =$$

$$\frac{192}{k^6} \cdot \frac{1}{16k^2} \cdot \int_0^{k^2} (k^2x^3 - x^4)dx =$$

$$\frac{12}{k^8}\left[k^2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{k^2} = \frac{12}{k^8} \cdot k^{10} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}k^2.$$

L'ascissa del baricentro è dunque $x_S = \frac{3}{5}k^2$.

d. Per capire se il solido ottenuto dalla rotazione di $f_3(x)$ può contenere un cilindro di raggio 0,5 e altezza 6, osserviamo che anche tale cilindro si ottiene dalla rotazione di una figura piana, più precisamente dalla rotazione di un rettangolo, di base 6 e altezza 0,5, attorno alla base. Perciò il problema si può riformulare così: è possibile costruire, al di sotto del grafico di $f_3(x)$, un rettangolo che ha una base lunga 6 contenuta sull'asse x, e un'altezza 0,5?

Riportiamo il grafico di $f_3(x)$ e la retta di equazione $y = 0{,}5$.

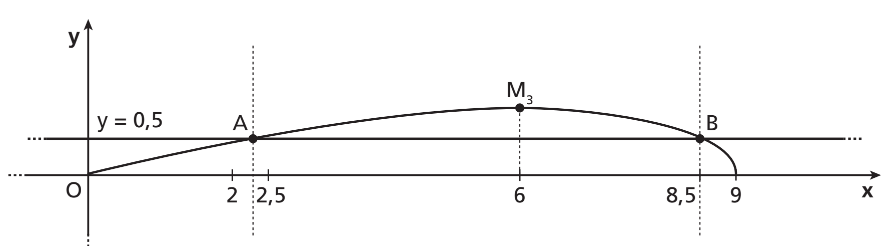


Figura 5

Osservando il grafico, ipotizziamo che $x_A < 2{,}5$, e $x_B \simeq 8{,}5$.

Le ascisse di A e B sono le soluzioni dell'equazione.

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{12}\sqrt{9-x} \rightarrow \frac{6}{x}=\sqrt{9-x} \rightarrow \frac{36}{x^2}=9-x \rightarrow x^3-9x^2+36=0.$$

Consideriamo il polinomio $p(x)=x^3-9x^2+36$ e compiliamo le seguenti tabelle per determinare gli intervalli in cui $p(x)$ cambia segno.

x_A	$p(x_A)$
2	8
2,5	$\simeq -4,6$
3	-18

x_B	$p(x_B)$
8	-28
8,5	$-0,1$
9	36

Possiamo quindi affermare che $2<x_A<2,5$ e $8,5<x_B<9$ poiché $p(x)$ cambia segno nei due intervalli.

Le ascisse di A e B distano dunque più di 6 unità, in quanto:

$$8,5-2,5<x_B-x_A<9-2 \rightarrow 6<x_B-x_A<7.$$

Esiste dunque il rettangolo di altezza 0,5 e base 6 che rimane al di sotto del grafico di $f_3(x)$; di conseguenza, esiste il cilindro richiesto di raggio 0,5 e altezza 6.

QUESTIONARIO

1 La funzione integranda $\ln x$ è continua e integrabile per $x>0$, ma non è definita in $x=0$.
Calcoliamo per parti $F(x)$ per $x>0$ e poi verifichiamo se la funzione $\ln x$ è integrabile in senso improprio per $x \geq 0$.

$$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt=\int_1^x 1\cdot \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}dt=$$
$$[t\ln t-t]_1^x=x\ln x-x+1 \quad \text{per } x>0.$$

Prendiamo ora un numero c reale positivo.

$$\lim_{c\to 0^+}\int_1^c \ln t\,dt=\lim_{c\to 0^+}[t\ln t-t]_1^c=\lim_{c\to 0^+}(c\ln c-c+1)=\lim_{c\to 0^+}c\ln c+1.$$

Poiché $\lim_{c\to 0^+} c\ln c$ si presenta in una forma indeterminata, applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{c\to 0^+}c\ln c=\lim_{c\to 0^+}\frac{\ln c}{\frac{1}{c}}=\lim_{c\to 0^+}\frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}}=\lim_{c\to 0^+}(-c)=0.$$

Quindi:

$$\lim_{c\to 0^+}\int_1^c \ln t\,dt=0+1=1 \text{ e } \ln x \text{ è integrabile in senso improprio su } [0;+\infty[.$$

Per determinare le intersezioni tra $F(x)$ e la retta $y=2x+1$ risolviamo l'equazione:

$$F(x)=2x+1 \quad \text{per } x\geq 0.$$

Si ha: $x\ln x-x+1=2x+1 \rightarrow x\ln x-3x-0 \rightarrow x(\ln x-3)=0 \rightarrow x=0 \vee x=e^3$.

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché appartenenti al dominio della funzione integrale.

I punti di intersezione sono $(0;1)$ e $(e^3; 2e^3+1)$.

2 Per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k(x) = -x^3 + 6kx + 33$ è polinomiale di terzo grado, definita e derivabile in $\mathbb{R}$.
Una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante ha coefficiente angolare 1.
Dobbiamo dunque trovare la funzione $f_k(x)$ la cui derivata, calcolata in $x = 3$, vale 1:

$$f_k'(x) = -3x^2 + 6k;$$

$$f_k'(3) = -27 + 6k;$$

$$f_k'(3) = 1 \rightarrow -27 + 6k = 1 \rightarrow k = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$$

La funzione cercata è dunque:

$$f_{\frac{14}{3}}(x) = -x^3 + 28x + 33.$$

L'ordinata del punto di tangenza è:

$$f_{\frac{14}{3}}(3) = -27 + 84 + 33 = 90.$$

L'equazione della retta tangente è del tipo $y = x + q$. Troviamo il termine noto q imponendo il passaggio per il punto di tangenza (3; 90):

$$90 = 3 + q \rightarrow q = 87.$$

Concludiamo che l'equazione della retta tangente è:

$$y = x + 87.$$

3 Il lancio di due dadi può dar luogo a 36 eventi, che consideriamo equiprobabili: uno per ogni coppia ordinata di numeri naturali da 1 a 6.
Se X è la variabile aleatoria che descrive il punteggio maggiore nel lancio dei dadi (o il punteggio comune), allora i valori possibili di X sono i numeri naturali 1, 2, …, 6.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Compiliamo la seguente tabella. La prima riga e la prima colonna indicano i possibili esiti di ciascun dado. Le altre 36 caselle indicano il punteggio maggiore (o il risultato comune) dei due dadi.

La probabilità che si verifichi l'evento $X = x$, con $x = 1, 2, \dots, 6$, è dato dal numero di volte in cui x compare nella tabella diviso per il numero dei casi possibili, che è 36.

Otteniamo la seguente distribuzione di probabilità.

V	1	2	3	4	5	6
***P*(*X*)**	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

In particolare, risulta $P(X = 3) = \frac{5}{36}$.

La media della distribuzione è data dalla somma dei valori moltiplicati per le rispettive probabilità:

$$M(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X = x) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4{,}472.$$

Calcoliamo la varianza tramite la formula $var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
Determiniamo prima la media della distribuzione X^2.

X	1	4	9	16	25	36
$P(X^2) = P(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

$$M(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{12} + \ldots + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36} \simeq 21{,}972.$$

La varianza di X vale allora:

$$var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \simeq 21{,}972 - (4{,}472)^2 \simeq 1{,}973.$$

4 L'equazione cartesiana che descrive un piano nello spazio è:

$$ax + by + cz = d,$$

con a, b e c non tutti nulli.
Per trovare l'equazione del piano, basta imporre il passaggio per i tre punti dati, O, A, C, e risolvere il sistema nelle incognite a, b, c, d. Ci aspettiamo che le soluzioni siano infinite, descritte da un parametro.

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = d \\ -3 \cdot a + 4 \cdot b + 0 \cdot c = d \\ -2 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c = d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + 8a - 8c = 0 \\ b = 2a - 2c \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a - 8c = 0 \\ b = 2a - 2c \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5}c \\ b = \frac{6}{5}c \\ d = 0 \end{cases}$$

L'equazione del piano è $\frac{8}{5}cx + \frac{6}{5}cy + cz = 0$, con $c \neq 0$ altrimenti i coefficienti sarebbero tutti nulli. Dividendo per c otteniamo:

$$\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + z = 0 \rightarrow 8x + 6y + 5z = 0,$$

che è quindi una possibile equazione del piano E cercato.

5 L'equazione della parabola $y^2 = 8x$ si può scrivere nella forma $x = \frac{1}{8}y^2$.

La parabola ha l'asse coincidente con l'asse x, la concavità rivolta verso destra, il vertice nell'origine.

I punti di intersezione della parabola con la retta di equazione $x = 2$ sono $A(2; 4)$ e $B(2; -4)$.
Tracciamo i grafici della retta e della parabola; la parte di piano delimitata da essi è un segmento parabolico con base AB.

Il volume del solido ottenuto ruotando il segmento parabolico attorno alla sua base si calcola con il metodo dei dischi.
Suddividiamo il solido di rotazione in dischi circolari perpendicolari all'asse di rotazione $x = 2$. Ciascun disco ha raggio $(2 - x)$.

Quindi il raggio del disco corrispondente all'ordinata y è

$$R(y) = 2 - \frac{1}{8}y^2.$$

Integriamo, lungo la base AB, cioè per y da -4 a 4, la funzione $\pi R(y)^2$, che rappresenta l'area del cerchio di raggio $R(y)$.

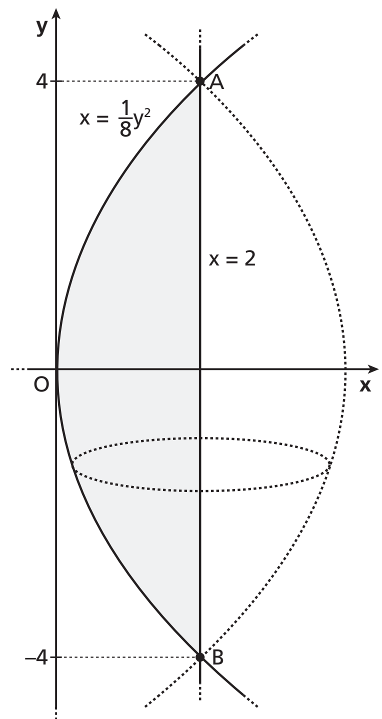


Figura 6

$$V = \pi\int_{-4}^{4} R(y)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 + \frac{1}{64}y^4 - \frac{1}{2}y^2\right) dy =$$

$$2\pi\left[4y + \frac{1}{5\cdot 64}y^5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3\right]_0^4 = 2\pi\left(4\cdot 4 + \frac{1}{5\cdot 4^3}\cdot 4^5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}4^3\right) =$$

$$2\pi\left(16 + \frac{16}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{256}{15} \simeq 53{,}62.$$

6 Disegniamo la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, di centro O, con i punti C e M su di essa e il quadrilatero $ABMC$.

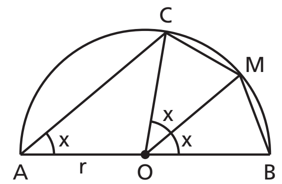


Figura 7

Scegliamo come incognita l'angolo $x = B\widehat{A}C$. Per il teorema dell'angolo al centro e alla circonferenza, l'angolo $B\widehat{O}C$ è il doppio di $B\widehat{A}C$, perché insiste sullo stesso arco $\widehat{BC}$. D'altra parte, essendo gli archi $\widehat{BM}$ e $\widehat{MC}$ uguali, si può concludere che $B\widehat{O}M = M\widehat{O}C = x$. Per differenza di angoli, risulta $A\widehat{O}C = \pi - 2x$.

I valori che può assumere x affinché $ABMC$ sia un quadrilatero non degenere sono $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nel caso $x = 0$, i punti B, M e C coincidono, e il quadrilatero degenera nel segmento AB. Nel caso $x = \frac{\pi}{2}$, risulta $C \equiv A$ e la figura degenera nel triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa AB.

Ricordiamo che l'area di un triangolo di lati a e b, con angolo x compreso tra essi, è uguale a $\frac{ab\sin x}{2}$.

Se chiamiamo $\mathscr{A}(x)$ la funzione che descrive l'area di $ABMC$ in funzione dell'angolo x, otteniamo:

$$\mathscr{A}(x) = \text{area}_{BMO} + \text{area}_{MOC} + \text{area}_{AOC} = 2\cdot\frac{r^2}{2}\sin x + r^2 \sin x \cos x = r^2(\sin x + \sin x \cos x).$$

Per trovare il massimo di $\mathscr{A}(x)$, calcoliamo la derivata prima:

$$\mathscr{A}'(x) = r^2(\cos x - \sin^2 x + \cos^2 x) = r^2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Calcoliamo i valori di x per cui la derivata si annulla:

$$\mathscr{A}'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Poniamo $t = \cos x$:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \ \rightarrow \ t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \ \rightarrow \ t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{2}.$$

$\cos x = -1 \ \rightarrow \ x = \pi$, non accettabile perché deve essere $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$\cos x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ x = \frac{\pi}{3}$, unica soluzione con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Studiamo il segno di $\mathscr{A}'(x)$.

Notiamo che possiamo scrivere $\mathscr{A}'(x)$ nella forma $\mathscr{A}'(x) = 2r^2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, il segno di $\mathscr{A}'(x)$ è dato dal segno del fattore $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

Da $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{3}$ e $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0$ per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ segue che $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo.

Il valore massimo dell'area di $ABMC$ è dunque:

$$\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = r^2\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot r^2 \simeq 1{,}299r^2.$$

Osserviamo che per $x = \frac{\pi}{3}$ il quadrilatero è un trapezio isoscele di base maggiore AB e base minore MC, e che è la metà di un esagono regolare, perché $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{CA} = r$.

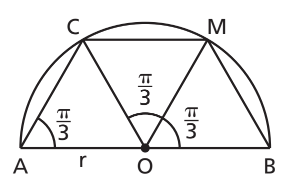


Figura 8

7 Consideriamo la variabile casuale discreta X che ha valori possibili $x = 0, 1, \ldots, 100$, definita come: «su 100 pezzi, x sono difettosi».

Risolviamo il quesito con la distribuzione binomiale.

La probabilità che un singolo pezzo sia difettoso è pari alla frequenza relativa: $p = 3\% = 0{,}03$. La probabilità che un pezzo non sia difettoso è quindi $1 - p = 0{,}97$. Se consideriamo la distribuzione X come binomiale, la probabilità che, su 100 pezzi, esattamente 2 siano difettosi, si può esprimere come la probabilità che, su 100 eventi indipendenti di probabilità p, ne siano realizzati 2:

$$P(X=2) = \binom{100}{2} p^2 (1-p)^{98} = \frac{100 \cdot 99}{2} (0{,}03)^2 (0{,}97)^{98} \simeq 0{,}225.$$

Applichiamo ora la distribuzione di Poisson. Tale distribuzione dà un'approssimazione della distribuzione binomiale, che risulta buona quando il numero di eventi è alto e la probabilità del singolo evento favorevole è piccola, come in effetti succede nel caso che stiamo trattando.

Per utilizzare la distribuzione di Poisson bisogna calcolare il parametro $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}03 = 3$.

La probabilità che si verifichino 2 eventi è data da:

$$P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{3^2}{2} \cdot e^{-3} \simeq 0{,}224.$$

Osserviamo che l'approssimazione di Poisson dà un risultato che si discosta da quello della distribuzione binomiale solo nella terza cifra decimale, con un errore assoluto di un millesimo.

8 Verifichiamo che $f(x) = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri.

Il quesito si può riformulare come segue: mostrare che i grafici delle funzioni $y = e^x$ e $y = \tan x$ si intersecano in infiniti punti.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano il grafico delle due funzioni, in un intervallo attorno all'origine, in cui sono segnati tre punti di intersezione E, F e G a titolo di esempio.

Dal confronto dei due grafici, risulta che quello della funzione esponenziale interseca quello della tangente una sola volta in ognuno degli infiniti intervalli $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, con $k \in \mathbb{Z}$.

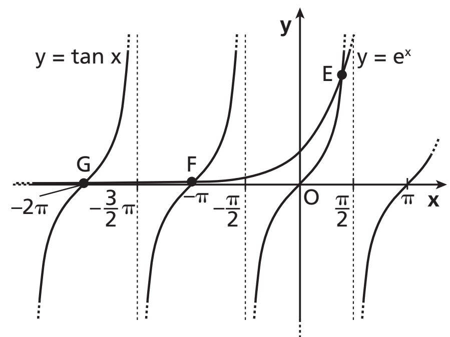


Figura 9

Osserviamo infatti che:

- $f(x)$ è continua nell'intervallo $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$;
- i limiti di $f(x)$ agli estremi di ciascun intervallo sono infiniti, di segno opposto,

  $$\lim_{x \to \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty,$$

  e quindi esistono due valori $x_1 < x_2$, interni all'intervallo, nei quali la funzione assume segno opposto: $f(x_1) > 0$ mentre $f(x_2) < 0$;
- per il teorema degli zeri, esiste un $\overline{x} \in]x_1; x_2[$ tale che $f(\overline{x}) = 0$.

Concludendo: poiché $f(x)$ si annulla almeno una volta all'interno di un numero infinito di intervalli, essa ha infiniti zeri.

Verifichiamo ora che $g(x) = e^x - \arctan x$ non ha alcuno zero.

Il problema equivale a dimostrare che non ci sono punti in comune tra i grafici delle funzioni $y = e^x$ e $y = \arctan x$.

La loro rappresentazione suggerisce che le due funzioni non hanno punti in comune.

Dimostriamo che $e^x > \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, confrontando le due funzioni su tre intervalli consecutivi.

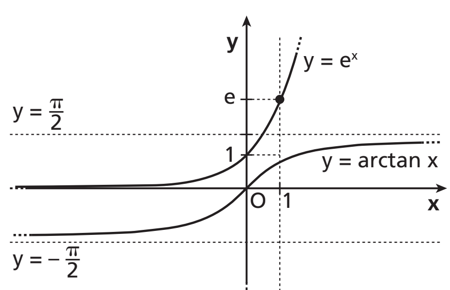


Figura 10

Ricordiamo che:

- $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$;
- entrambe le funzioni sono crescenti.

Da ciò, possiamo dedurre quanto segue.

- Per $x \leq 0$: $\arctan x \leq 0$, mentre $e_x > 0$.
- Per $0 < x \leq 1$: $\arctan x \leq \arctan 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, mentre $e^x > 1$.
- Per $x > 1$: $\arctan x < \frac{\pi}{2} < 2$, mentre $e^x > e > 2$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta dunque $e^x > \arctan x$; ne segue che la funzione $e^x - \arctan x$ è sempre positiva, e quindi non si annulla per alcun valore di x.

9 La derivata della funzione $f(x)$ in un punto x del suo dominio è per definizione il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, al tendere a zero dell'incremento h.

Consideriamo $f(x) = x \cdot e^x$ e calcoliamo il limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^{x+h} + h \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^x (e^h - 1) + h \cdot e^{x+h}}{h} = \lim_{h \to 0}\left[x \cdot e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) + e^{x+h}\right] = x \cdot e^x \left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) + e^x =$$
$$x \cdot e^x \cdot 1 + e^x = (x+1) \cdot e^x.$$

10 La funzione $f''(x)$ è polinomiale, quindi definita e integrabile in $\mathbb{R}$. La sua primitiva coincide con la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (3x-6)dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c.$$

Poiché l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa 0 vale 45°, si ha:

$$f'(0) = \pm \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow c = \pm 1,$$

a seconda che l'angolo sia considerato in senso antiorario o orario.

Risulta dunque: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x \pm 1$.

$f(x)$ si ottiene integrando $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x \pm 1\right)dx = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \pm x + d, \quad \text{con } d \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo il passaggio per $(2; -7)$:

$$f(2) = -7 \rightarrow \frac{2^3}{2} - 3 \cdot 2^2 \pm 2 + d = -7 \rightarrow 4 - 12 \pm 2 + d = -7 \rightarrow d = 1 \mp 2.$$

Abbiamo quindi due casi:

- se $c = +1$, allora $d = 1 - 2 = -1$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + x - 1$;
- se $c = -1$, allora $d = 1 + 2 = 3$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - x + 3$.