Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e attrezzare.

La superficie individuata è rappresentata in figura 1:

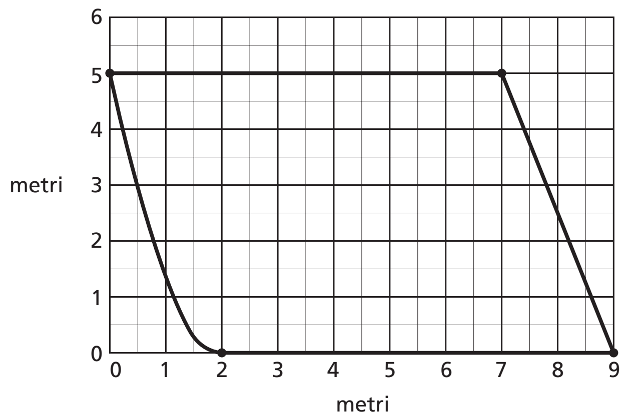


Figura 1

La superficie viene chiusa con pareti laterali alte 3,60 metri e con un tetto piano e orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di CO_2 (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di CO_2 lo 0,15%: su 1 milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di CO_2 deve essere dunque 1500.

Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

Metri cubi da aerare	Potenza richiesta (kilowatt)
41	2
68	2,6
108	3,5
135	4,4
162	5,3
216	6,1
270	7,2

1. In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di CO_2 installato nella sala indica una concentrazione dello 0,3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0,15%. Il sistema di aerazione immette nella sala 20 $\frac{\text{m}^3}{\text{minuto}}$ di aria fresca contenente lo 0,1% di CO_2.

2. Approssimando il volume della sala a 130 m^3, ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (espresso in minuti).

Verifica inoltre che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale.

3. Determina i valori da assegnare alle costanti k e h in modo che la funzione rappresenti l'andamento della concentrazione di CO_2 a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'aeratore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.

4. L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso anche durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2 (*fonte*: OSHA, *Occupational Safety and Health Administration*), descrivi in termini qualitativi come cambierà l'andamento di $c(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

PROBLEMA 2

Fissato $k \in \mathbb{R}$, la funzione $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita: $g_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$.

Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano O_{xy}.

1. Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \mathbb{R}$, l'andamento della funzione g_k.

2. Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k, passano tutte per il punto $T\left(0; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k.

3. Prova che esiste un unico rettangolo R_k di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. È possibile scegliere k in modo che tale rettangolo R_k sia un quadrato?

4. Posto

$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx,$$

determina il valore di $\lim_{t \to +\infty} G(t)$, e interpreta il risultato in termini geometrici.

QUESTIONARIO

1 Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

a. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + x;$

b. $y = 2e^{-x} + x;$

c. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(x - 1);$

d. $y = e^{-2x} + x.$

2 Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3-1|},$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

3 Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0{,}1\ \text{m}^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200\ \dfrac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$.

4 Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha $A_n = e - n\,A_{n-1}$.

5 I lati di un triangolo ABC misurano: $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 5$ cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A?

6 I punti $A(3; 4; 1)$, $B(6; 3; 2)$, $C(3; 0; 3)$, $D(0; 1; 2)$, sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

7 Determinare la distanza tra il punto $P(2; 1; 1)$ e la retta:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}.$$

8 Supponiamo che l'intervallo di tempo t (in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di $100\ \text{m}^2$ sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:

$$P(t \le z) = \int_0^z 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01s}\,ds.$$

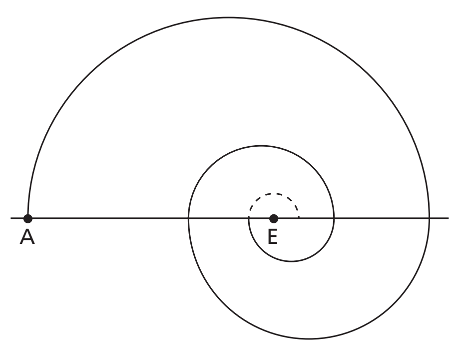
a. Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro.

b. Si determini qual è il minimo numero di anni z, tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro.

9 Una curva «a spirale» inizia nel punto A, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di 80 cm. Il diametro d_2 della seconda è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_1. Il diametro d_3 della terza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_2, e così via: $d_{n+1} = \frac{3}{5} d_n$ per ogni n.

Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie semicirconferenze tendono al cosiddetto «occhio» E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).
Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E?
E qual è la lunghezza del cammino che va da A a E, percorrendo l'intera curva?

Figura 2



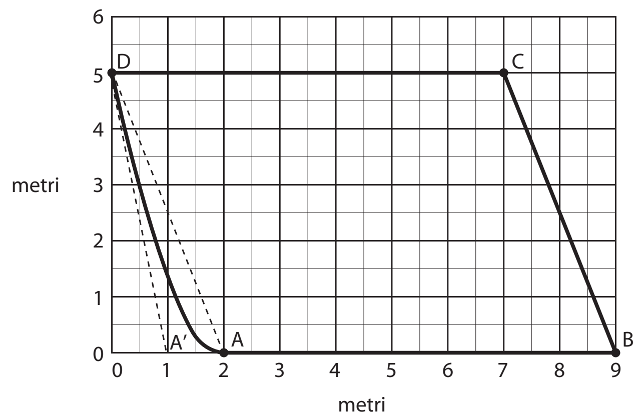
10 Si stabilisca il valore del limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 73 \cdot \cos^3\left(4x + \frac{\pi}{11}\right)}{5x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{7}\right)},$$

motivando adeguatamente la risposta.

PROBLEMA 1

1. Calcoliamo il volume della sala applicando la formula *area base* × *altezza*.
L'altezza è 3,6 m.
Per stimare l'area di base, osserviamo che la superficie della sala è compresa fra quella del parallelogramma $ABCD$ e quella del trapezio $A'BCD$ indicati in figura 3.



■ **Figura 3**

$$\text{Area}(ABCD) = 7 \cdot 5 = 35 \text{ m}^2$$

$$\text{Area}(A'BCD) = \frac{(8+7)\cdot 5}{2} = 37,5 \text{ m}^2$$

Possiamo dunque stimare la superficie della sala tramite la media aritmetica delle aree appena calcolate:

$$\text{Area di base della sala} \simeq \frac{35+37,5}{2} = 36,25 \text{ m}^2$$

e ricavare infine il volume della sala:

$$\text{Volume della sala} \simeq 36,25 \cdot 3,6 = 130,5 \text{ m}^3.$$

Osserviamo ora la scheda tecnica che ci fornisce il testo e notiamo che per aerare 135 m^3 occorrono 4,4 kW. La potenza richiesta sarà quindi di circa 4,4 kW.

2. Indichiamo con $v(t)$ il volume di CO_2 presente nella sala all'istante t (dove $t = 0$ è l'istante in cui si accende l'aeratore) e con $V = 130$ m^3 il volume, approssimato, della sala stessa. La concentrazione di CO_2 risulterà allora dal rapporto $c(t) = \frac{v(t)}{V}$.
Per ogni minuto di funzionamento l'aeratore immette nella sala 20 m^3 di aria fresca contenente lo 0,1% di CO_2, quindi immette nella sala:

$$20 \cdot \frac{0,1}{100} = 20 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

In Δt minuti di funzionamento verranno allora immessi nella sala:

$$0,02 \cdot \Delta t \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

Contemporaneamente, in un minuto di funzionamento a partire dall'istante t, verranno espulsi dalla sala 20 m^3 di aria "viziata", dove la concentrazione di CO_2 la possiamo pensare in prima approssimazione costante e pari a $c(t)$, ovvero la concentrazione presente all'inizio del minuto considerato. In Δt minuti di funzionamento, verranno allora espulsi dalla sala:

$$20 \cdot c(t) \cdot \Delta t \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

Concludiamo che, nel passare dall'istante t all'istante $t+\Delta t$, il bilancio del volume di CO_2 presente in sala è:

$$v(t+\Delta t)-v(t)=0,02\cdot\Delta t-20\cdot c(t)\cdot\Delta t$$

e, dividendo entrambi i membri per il volume della sala V, otteniamo il bilancio della concentrazione di CO_2:

$$c(t+\Delta t)-c(t)=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{V}=\frac{0,02\cdot\Delta t-20\cdot c(t)\cdot\Delta t}{V},$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}=\frac{0,02}{V}-\frac{20}{V}c(t)=\frac{0,02}{130}-\frac{20}{130}c(t)=\frac{2}{13}[0,001-c(t)].$$

Passando al limite per $\Delta t\to 0$ otteniamo la relazione fra la concentrazione $c(t)$ e la sua velocità di cambiamento $c'(t)$, che si presenta sotto forma di equazione differenziale a variabili separabili:

$$c'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}\quad\to\quad c'(t)=\frac{2}{13}[0,001-c(t)].$$

Pur non essendo richiesto, possiamo risolvere tale equazione:

$$\frac{dc(t)}{c(t)-0,001}=-\frac{2}{13}dt\ \to\ \ln\left|c(t)-0,001\right|=-\frac{2}{13}t+\alpha\ \to\ c(t)-0,001=\pm e^{-\frac{2}{13}t+\alpha}\ \to$$

$$c(t)=\pm e^{\alpha}\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0,001,\ \text{con } \alpha\in\mathbb{R}.$$

La soluzione si presenta nella forma richiesta dal testo del problema:

$$c(t)=k\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+h,$$

posto $k=\pm e^{\alpha}$ e $h=0,001$.

3. Abbiamo già stabilito al punto precedente che è $h=0,001$.
Per determinare k, imponiamo che la concentrazione di CO_2 all'istante iniziale sia dello 0,3%:

$$c(0)=\frac{0,3}{100}\ \to\ k\cdot e^{-\frac{2}{13}\cdot 0}+0,001=0,003\ \to\ k=0,002.$$

Otteniamo dunque:

$$c(t)=0,002\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0,001.$$

Tracciamo il grafico della funzione $c(t)$. Passa per il punto $E(0;\ 0{,}003)$, ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0,001$ poiché $\lim_{t\to+\infty}\left(0,002\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0,001\right)=0,001$ e si tratta di una funzione sempre decrescente in quanto è un'esponenziale con esponente di primo grado negativo.

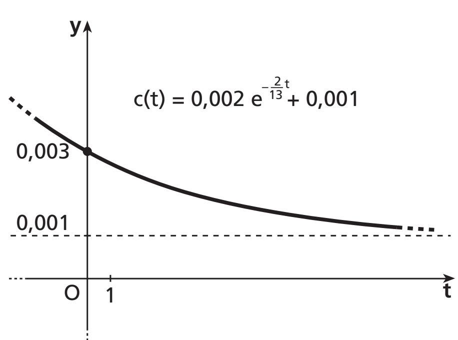


Figura 4

Poiché i condomini richiedono che nel momento della riunione la concentrazione di CO_2 sia ridotta allo 0,15%, abbiamo:

$$0{,}0015 = 0{,}002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0{,}001 \to 15 = 20e^{-\frac{2}{13}t} + 10 \to 20e^{-\frac{2}{13}t} = 5 \to e^{-\frac{2}{13}t} = \frac{1}{4} \to$$

$$e^{\frac{2}{13}t} = 4 \to \frac{2}{13}t = \ln 4 \to t = \frac{13}{2}\ln 4 \simeq 9{,}01.$$

L'impianto deve quindi essere messo in funzione circa 9 minuti prima dell'inizio della riunione.

4. Dopo 10 minuti dall'accensione dell'aeratore abbiamo:

$$c(10) = 0{,}002 \cdot e^{-\frac{2}{13}\cdot 10} + 0{,}001 \simeq 1{,}43 \cdot 10^{-3},$$

e quindi la concentrazione di CO_2 diventa di circa 0,143%.
Ognuno dei 50 condomini che entra nella sala al decimo minuto, inspira 8 litri/minuto di aria, dove la concentrazione di CO_2 è $c(t)$, ed espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2. Nel frattempo, l'aeratore è ancora in funzione. Analogamente a prima, possiamo impostare il bilancio del volume di CO_2 presente in sala a partire dal decimo minuto (ricordiamo che 1 litro $= 1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$):

$$v(t+\Delta t) - v(t) = 0{,}02 \cdot \Delta t - 20 \cdot c(t) \cdot \Delta t - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot c(t) \cdot \Delta t + 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot \frac{4}{100} \cdot \Delta t$$

da cui (passando ai numeri decimali visto che serve solo una valutazione qualitativa):

$$c'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{V \cdot \Delta t} = \frac{0{,}02}{130} - \frac{20}{130} \cdot c(t) - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{130} \cdot c(t) + 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{130} \to$$

$$c'(t) = 0{,}154 \cdot 10^{-3} - 0{,}154 \cdot c(t) - 3{,}077 \cdot 10^{-3} \cdot c(t) + 0{,}123 \cdot 10^{-3} \to$$

$$c'(t) = 0{,}277 \cdot 10^{-3} - 0{,}154 \cdot c(t) \to c'(t) = 0{,}0003 - 0{,}16 \cdot c(t).$$

Risolvendo l'equazione differenziale otteniamo:

$$c'(t) = -0{,}16\,[c(t) - 0{,}002] \to \frac{dc(t)}{c(t) - 0{,}002} = -0{,}16dt \to$$

$$\ln|c(t) - 0{,}002| = -0{,}16t + \alpha \to c(t) - 0{,}002 = \pm e^{-0{,}16t+\alpha} \to c(t) = k \cdot e^{-0{,}16t} + 0{,}002,$$

dove $k = \pm e^{\alpha}$.

Per la continuità della funzione concentrazione, imponiamo che per $t = 10$ minuti sia $c(t) = 1{,}43 \cdot 10^{-3}$, cioè il valore calcolato prima:

$$c(10) = 1{,}43 \cdot 10^{-3} \to k \cdot e^{-0{,}16 \cdot 10} + 0{,}002 = 1{,}43 \cdot 10^{-3} \to k = \frac{1{,}43 \cdot 10^{-3} - 0{,}002}{e^{-1{,}6}} \simeq -0{,}003.$$

L'andamento complessivo della concentrazione è rappresentato da una funzione definita a tratti:

$$c(t) = \begin{cases} 0{,}002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0{,}001 & \text{se } 0 \leq t < 10 \\ -0{,}003 \cdot e^{-0{,}16t} + 0{,}002 & \text{se } t \geq 10 \end{cases}.$$

Otteniamo il seguente grafico qualitativo. Per $t \geq 10$ la funzione è esponenziale crescente e ammette asintoto orizzontale di equazione $y = 0{,}002$ poiché

$$\lim_{t \to +\infty} (-0{,}003 \cdot e^{-0{,}16t} + 0{,}02) = 0{,}002.$$

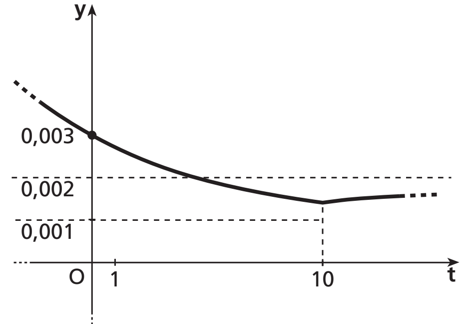


Figura 5

Nel testo, si dice che di norma si considera il valore limite della concentrazione di CO_2 fissato allo 0,15%. Questo ci permette di ricavare quanto tempo occorre, dopo l'inizio della riunione, per raggiungere tale limite.

$$-0,003 \cdot e^{-0,16t} + 0,002 = 0,0015 \;\rightarrow\; -0,003 \cdot e^{-0,16t} = -0,0005 \;\rightarrow\; e^{-0,16t} = 0,17 \;\rightarrow$$

$$-0,16t = \ln 0,17 \;\rightarrow\; t = -\frac{\ln 0,17}{0,16} \simeq 11 \text{ minuti.}$$

Quindi $\Delta t = (11 - 10)$ minuti $= 1$ minuto.

Il valore limite della concentrazione di CO_2 si raggiunge dopo circa un minuto dall'inizio della riunione. Poiché la funzione per $t \rightarrow +\infty$ ammette asintoto orizzontale $y = 0,002$, la concentrazione di CO_2 non supererà mai lo 0,2% circa.

PROBLEMA 2

1. Determiniamo le caratteristiche generali di $g_k(x) = e^{-kx^2}$, $\forall k \in \mathbb{R}$:

- dominio: $\mathbb{R}$;
- $g_k(-x) = g_k(x)$, quindi la funzione è pari e simmetrica rispetto all'asse y;
- tutte le curve passano per $V(0; 1)$;
- $g_k(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ quindi il suo grafico appartiene al primo e secondo quadrante.

Casi particolari

- **Caso $k = 0$.**

  $y = e^0 \rightarrow y = 1$. La funzione è costante, non ammette asintoti. Non esistono punti di massimo, minimo e flesso.

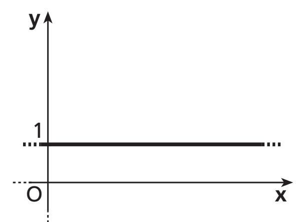


Figura 6

- **Caso $k > 0$.**

  Asintoti

  $\lim\limits_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-kx^2} = 0 \rightarrow y = 0$ è l'asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

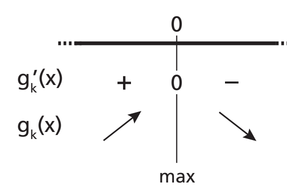


Figura 7

  Studio di $g'_k(x)$

  $g'_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$. Visto che sia k sia e^{-kx^2} sono quantità positive, otteniamo $g'_k(x) \geq 0$ per $x \leq 0$. Il punto $V(0; 1)$ è di massimo assoluto.

  Studio di $g''_k(x)$

  $g''_k(x) = -2k[e^{-kx^2} + x(-2kx)e^{-kx^2}] \rightarrow$

  $g''_k(x) = 2ke^{-kx^2}(2kx^2 - 1)$.

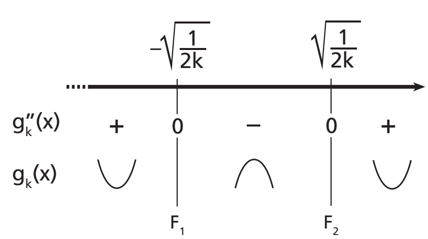


Figura 8

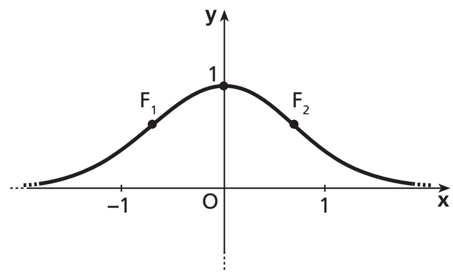
Visto che $2ke^{-kx^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, otteniamo:

$$g_k''(x) \geq 0 \rightarrow 2kx^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{1}{2k}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

I punti di flesso sono $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e $F_2\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$.

Disegniamo il grafico nel caso $k = 1: y = e^{-x^2}$.

Osserviamo che la curva ammette un punto di massimo assoluto in $V(0; 1)$, due flessi nei punti $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e $F_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.



■ **Figura 9**

- **Caso $k < 0$.**

  Asintoti

  $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-kx^2} = +\infty \rightarrow$ non esiste asintoto orizzontale.

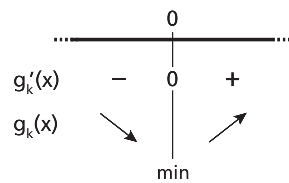
  Vediamo se esiste l'asintoto obliquo.

  $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-kx^2}}{x} = \pm\infty \rightarrow$ perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto a x.

  Quindi non esiste asintoto obliquo.

  Studio di $g_k'(x)$

  $g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$. Visto che $k < 0$ e $e^{-kx^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, allora $g_k'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Il punto $V(0; 1)$ è di minimo assoluto.



■ **Figura 10**

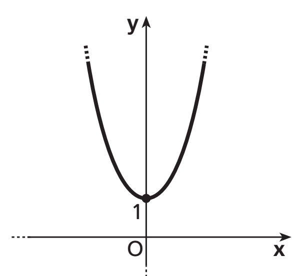
  Studio di $g_k''(x)$

  $$g_k''(x) = -2k[e^{-kx^2} + x(-2kx)e^{-kx^2}] \rightarrow g_k''(x) = 2ke^{-kx^2}(2kx^2 - 1).$$

  Osserviamo che $2ke^{-kx^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e che $2kx^2 - 1 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

  Quindi non esistono punti di flesso e il grafico volge la concavità verso l'alto.

Disegniamo il grafico nel caso $k = -1: y = e^{x^2}$.



■ **Figura 11**

2. Abbiamo mostrato nel punto 1 che i punti di flesso esistono per $k > 0$, hanno coordinate $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e l'ordinata è indipendente da k.

Determiniamo ora le rette tangenti nei due punti di flesso. Calcoliamo il valore della derivata prima per i valori delle ascisse dei punti di flesso:

$$g_k'\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = -2k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = \mp\sqrt{\frac{2k}{e}}.$$

Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per i punti di flesso F_1 e F_2 e aventi coefficiente angolare $\mp\sqrt{\frac{2k}{e}}$. Otteniamo:

$$y-\sqrt{\frac{1}{e}}=\mp\sqrt{\frac{2k}{e}}\left(x\mp\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)\to y=\mp\sqrt{\frac{2k}{e}}x+\frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Queste rette, per ogni valore di $k>0$, passano per il punto $T\left(0;\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

3. Consideriamo un generico rettangolo inscritto in S_k con un lato sull'asse x. Indichiamo con A il punto $(h;0)$ con $h>0$. Per simmetria, il punto $D(-h;0)$ è un altro vertice del rettangolo.
Gli altri due vertici del rettangolo appartegono alla curva Γ_k e quindi avranno coordinate $B(h;e^{-kh^2})$ e $C(-h;e^{-kh^2})$.

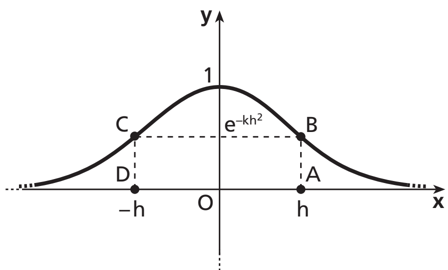


Figura 12

L'area del rettangolo $ABCD$ è $2he^{-kh^2}$. Consideriamo tale area come una funzione $y(h)$ e deriviamola per provare che esiste un unico rettangolo di area massima

$$y'(h)=2(e^{-kh^2}-2h^2ke^{-kh^2})=2e^{-kh^2}(1-2h^2k).$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$y'(h)\geq 0\to 2e^{-kh^2}(1-2h^2k)\geq 0\to 1-2h^2k\geq 0\to$$

$$h^2\leq\frac{1}{2k}\to-\sqrt{\frac{1}{2k}}\leq h\leq\sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

Poiché $h>0$, la soluzione è limitata al solo intervallo $0\leq h\leq\sqrt{\frac{1}{2k}}$ e quindi nel punto $h=\sqrt{\frac{1}{2k}}$ si avrà un punto di massimo relativo.

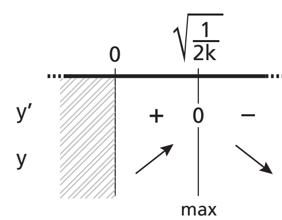


Figura 13

Esiste quindi un solo rettangolo di area massima e tale area vale

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-k\frac{1}{2k}}=2\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{ke}}.$$ Notiamo che i punti $B(h;e^{-kh^2})$ e $C(-h;e^{-kh^2})$ per $h=\sqrt{\frac{1}{2k}}$ coincidono con i punti di flesso $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}};\sqrt{\frac{1}{e}}\right)$.

Rimane ora da dimostrare se il rettangolo di area massima può essere un quadrato. Tale condizione è verificata se $\overline{AB}=\overline{BC}$, ossia

$$2h=e^{-kh^2}\to 2\sqrt{\frac{1}{2k}}=e^{-k\frac{1}{2k}}\to\sqrt{\frac{2}{k}}=e^{-\frac{1}{2}}\to\frac{2}{k}=\frac{1}{e}\to k=2e\cdot$$

4. Calcoliamo l'integrale richiesto:

$$G(t)=2\pi\int_0^t xe^{-x^2}dx=-\frac{2\pi}{2}\int_0^t-2xe^{-x^2}dx=-\pi[e^{-x^2}]_0^t=-\pi e^{-t^2}+\pi.$$

Passando al limite otteniamo:

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = \lim_{t \to +\infty} (-\pi e^{-t^2} + \pi) = \pi.$$

Dal punto di vista geometrico possiamo interpretare l'integrale dato come un modo per determinare il volume di un cilindro ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano compresa tra l'asse x, l'asse y, la retta di equazione $x = t$ e la curva di equazione $y = e^{-x^2}$.
Nel momento in cui si chiede di passare al limite il risultato dell'integrale, si può interpretare il risultato come il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione del primo quadrante sottesa alla curva di equazione $y = e^{-x^2}$.

QUESTIONARIO

1 $y'' + 2y' + 2y = x$ è un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea.
Ricordiamo che la soluzione generale y dell'equazione $y'' + by' + cy = r(x)$ si ottiene addizionando a una sua soluzione particolare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' + by' + cy = 0$.
Scriviamo l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata e cerchiamo le sue soluzioni:

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \rightarrow k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

L'integrale generale può esprimersi nella forma: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.
Nel nostro caso: $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.
Quindi: $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Poniamo $c_1 = c_2 = 1$ e otteniamo la prima parte della soluzione:

$$y = e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Quindi le funzioni b) e d) non possono essere soluzione.
Ci concentriamo ora sulla parte polinomiale della soluzione.

Consideriamo per esempio $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$, il secondo termine della funzione proposta c).

Calcoliamo $f'(x) = \frac{1}{2}$ e $f''(x) = 0$ e sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + 2y = x.$$

Otteniamo:

$$0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}(x-1) = x \rightarrow 1 + x - 1 = x.$$

Poiché si tratta di una identità, la risposta c) è corretta.

Mostriamo infine che anche la funzione proposta a) non è soluzione.
Considerato $f(x) = x$, il secondo termine della soluzione a), abbiamo:

$$f'(x) = 1 \text{ e } f''(x) = 0.$$

Sostituendo in $y'' + 2y' + 2y = x$ otteniamo:

$$0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot x = x \rightarrow 2 + 2x = x \rightarrow x = -2$$

che non è un'identità, quindi la funzione a) non è soluzione.

2 La funzione assegnata è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ammette asintoti verticali.
Studiamo gli asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-|x^3-1|} = 0.$$

Infatti si tratta di una forma indeterminata $0\cdot\infty$, ma l'esponenziale tende a zero più velocemente di quanto x tenda all'infinito.
Quindi, $f(x)$ è priva di asintoti obliqui e la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.
Per la ricerca dei punti di massimo e di minimo riscriviamo la funzione nella forma definita per casi:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^3+1} & \text{se } x \geq 1 \\ xe^{x^3-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Calcoliamo:

$$f'(x) = \begin{cases} (1-3x^3)\,e^{-x^3+1} & \text{se } x > 1 \\ (1+3x^3)\,e^{x^3-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-}(1+3x^3)\,e^{x^3-1} = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+}(1-3x^3)\,e^{-x^3+1} = -2,$$

quindi la funzione non è derivabile in $x=1$, dove presenta un punto angoloso $A(1;\,1)$ che risulta un massimo relativo.
Studiamo il segno della derivata prima.

Per $x>1$, otteniamo: $f'(x)\geq 0 \to 1-3x^3 \geq 0 \to x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Notiamo che $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$ e quindi $f'(x) < 0 \;\forall\, x > 1$, la funzione $f(x)$ risulta decrescente $\forall x > 1$.

Per $x<1$ otteniamo: $f'(x)\geq 0 \to 1+3x^3 \geq 0 \to x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Notiamo che $-\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$ e quindi $B\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};\, -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,e^{-\frac{4}{3}}\right)$ è punto di minimo relativo.

Rappresentiamo in figura il grafico complessivo della derivata prima di $f(x)$.

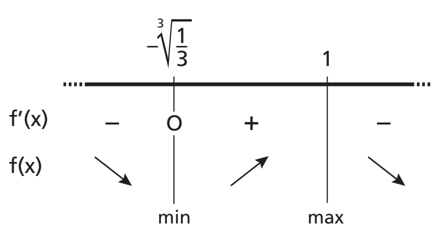


Figura 14

Possiamo tracciare un grafico approssimativo osservando che $f(x)$ passa per $O(0;\,0)$ e che $f(x)>0$ per $x>0$ e $f(x)<0$ per $x<0$.

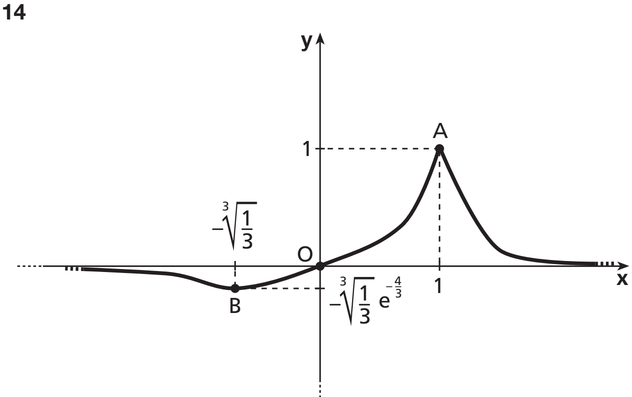


Figura 15

3 Il volume V del cubo varia nel tempo secondo la legge $V = V_0 - v \cdot t$.

$$V_0 = 0,1\ \text{m}^3 = 10^5\ \text{cm}^3 \rightarrow \text{Lato } l = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_0 - v \cdot t} = \sqrt[3]{10^5 - 1200t}\,.$$

Calcoliamo la velocità di variazione dello spigolo:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(10^5 - 1200t)^2}} \cdot (-1200) = -\frac{400}{\sqrt[3]{(10^5 - 1200t)^2}}\,.$$

4 $A_1 = \int_0^1 x e^x\, dx$. Calcoliamo l'integrale per parti:

$$A_1 = \int_0^1 x e^x\, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = [x e^x - e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Dimostriamo che $A_n = e - n\, A_{n-1}$, osservando che $A_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} e^x\, dx$.

Procediamo di nuovo per parti:

$$A_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx = [x^n e^x]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\, dx = e - n \cdot A_{n-1}.$$

5 Il triangolo ABC è isoscele, con base BC.
Tracciamo l'asse di AB, che passa per il punto medio M e interseca la base BC in N. Tale asse divide il triangolo in due parti: il triangolo rettangolo BNM e il quadrilatero $NCAM$.
Sia P un punto interno al triangolo ABC. Se P è in particolare, interno al triangolo BNM, allora $BP < AP$ e quindi il punto P è più vicino al vertice B che al vertice A.
La probabilità P che si verifichi questa condizione è data da:

$$P = \frac{\text{Area}_{MBN}}{\text{Area}_{ABC}}.$$

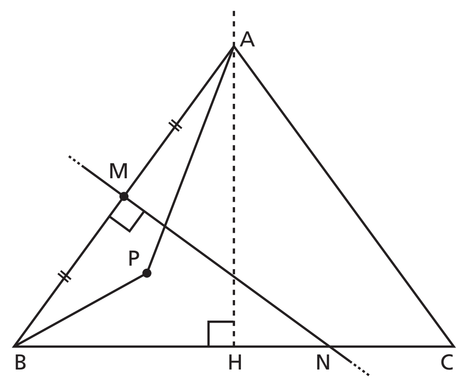


Figura 16

Calcoliamo l'area del triangolo ABC.
Utilizzando la formula di Erone $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, con $a = 6$, $b = c = 5$ e il semiperimetro $p = 8$, otteniamo:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-6) \cdot (8-5) \cdot (8-5)} =$$

$$\sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12.$$

In maniera alternativa, con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH, determiniamo:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4,$$

da cui ricaviamo: $\text{Area}_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{\,3} \cdot 4 = 12.$

Calcoliamo l'area del triangolo BNM.

Sia $N\widehat{B}M = \beta$. Consideriamo il triangolo rettangolo ABH; per definizione goniometrica:

$$\tan\beta = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{4}{3}.$$

Otteniamo allora: $\overline{MN} = \overline{BM} \cdot \tan\beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$,

da cui: $\text{Area}_{BMN} = \frac{1}{2}\overline{BM} \cdot \overline{MN} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\cancel{10}^{\,5}}{3} = \frac{25}{6}.$

Possiamo ora calcolare la probabilità P richiesta:

$$P = \frac{\text{Area}_{MBN}}{\text{Area}_{ABC}} = \frac{\frac{25}{6}}{12} = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{72} \simeq 0,347.$$

Quindi, la probabilità che il punto P sia più vicino al vertice B che al vertice A è circa del 34,7%.

Osserviamo che per calcolare la misura di MN potevamo utilizzare anche la similitudine. Infatti i triangoli rettangoli BMN e ABH sono simili e quindi:

$$\overline{MN} : \overline{AH} = \overline{BM} : \overline{BH} \to \overline{MN} : 4 = \frac{5}{2} : 3 \to \overline{MN} = \frac{4 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \frac{10}{3}.$$

6 Dimostriamo che il punto medio di AC coincide con il punto medio di DB.

$$M_{AC}\left(\frac{3+3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{1+3}{2}\right) \to M_{AC}(3; 2; 2); \qquad M_{BD}\left(\frac{6}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{2+2}{2}\right) \to M_{BD}(3; 2; 2).$$

Quindi $M_{AC} = M_{BD}$.

Poiché le diagonali si dimezzano scambievolmente, il quadrilatero è un parallelogramma (osserviamo che il fatto che i punti medi delle due diagonali coincidano assicura che i punti A, B, C, D giacciono su un piano).

Il parallelogramma $ABCD$ sarebbe in particolare un rettangolo se le diagonali avessero la stessa lunghezza. Calcoliamo:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-3)^2 + (4-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20},$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(0-6)^2 + (1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{40}.$$

Poiché le diagonali hanno misure diverse, $ABCD$ non è un rettangolo.

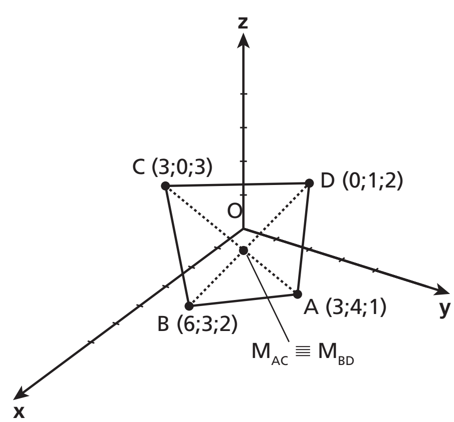


Figura 17

7 Scriviamo la retta $r: \begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ in forma parametrica, ponendo $y = t$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x = -t - t + 1 + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}.$$

Un vettore di direzione della retta r, e quindi del piano a essa perpendicolare, è $(-2; 1; -1)$.
L'equazione del piano π passante per $P(2; 1; 1)$ e perpendicolare alla retta è dunque:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \to -2(x-2) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \to$$

$$2x - y + z - 4 = 0.$$

Calcoliamo le coordinate del punto Q di intersezione tra la retta r e il piano π. Sostituiamo le equazioni parametriche della retta nell'equazione del piano e otteniamo:

$$2(2-2t)-(t)+(1-t)-4=0 \to t=\frac{1}{6}.$$

$$Q:\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+2 \\ y=\frac{1}{6} \\ z=-\frac{1}{6}+1 \end{cases} \quad \to \quad Q:\begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{6} \\ z=\frac{5}{6} \end{cases}.$$

La distanza PQ è la distanza del punto P dalla retta r e vale:

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

8 **a.** $P(t \le 200)=\int_0^{200} 0,01 \cdot e^{-0,01s}ds=\left[-e^{-0,01s}\right]_0^{200}=-e^{-2}+1.$

La probabilità che due fulmini cadono entro non più di 200 anni l'uno dall'altro è circa dell'86,5%.

b. $P(t \le z) \ge 95\% \to \int_0^{z} 0,01\, e^{-0,01s}ds \ge 95\% \to \left[-e^{-0,01s}\right]_0^{z}=-e^{-0,01z}+1 \ge 0,95 \to e^{-0,01z} \le 0,05 \to$

$-\frac{z}{100} \le \ln 0,05 \to -z \le 100 \ln 0,05 \to z \ge 299,57.$

Il numero minimo di anni z richiesto affinché la probabilità che i prossimi due fulmini cadano entro non più di z anni uno dall'altro sia almeno del 95% è di circa 300.

9 Notiamo che i diametri delle semicirconferenze costituiscono una progressione geometrica di ragione $q=\frac{3}{5}$. Posto $d_1=80$ cm il diametro della prima semicirconferenza, per la seconda e la terza semicirconferenza i diametri risultano:

$$d_2=d_1\cdot\frac{3}{5}=80\cdot\frac{3}{5}\text{ cm}=48\text{ cm},\quad d_3=d_2\cdot\frac{3}{5}=d_1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=80\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\text{ cm}=28,8\text{ cm}.$$

In generale sarà: $d_n=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\cdot d_1$.

Disegniamo la curva nel piano cartesiano e centriamo nell'origine la prima semicirconferenza di raggio 40 cm. La seconda circonferenza ha raggio $\frac{d_2}{2}=24$ cm, centro nel punto $C_2(16;0)$ e intersezione con l'asse x in $E_1(-8;0)$.

La terza circonferenza ha raggio $\frac{d_3}{2}=14,4$ cm, centro nel punto $C_3(6,4;0)$ e intersezione con l'asse x nel punto $E_2(20,8;0)$.

La distanza di $A(-40;0)$ da $E_1(-8;0)$, primo «occhio» della spirale, è 32 cm; la distanza di A dal punto E_2 si ottiene nel modo seguente:

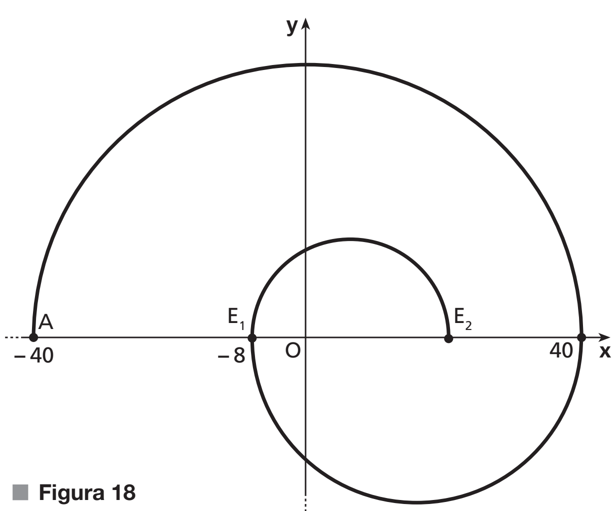


Figura 18

$$\overline{AE_2}=\overline{AE_1}+\overline{E_1E_2}=(d_1-d_2)+d_3=[(80-48)+28,8]\text{ cm}=(32+28,8)\text{ cm}=60,8\text{ cm}.$$

Generalizziamo il ragionamento e calcoliamo la distanza di A dal generico punto E_n:

$$\overline{AE_n} = \overline{AE_1} + \overline{E_1E_2} - \overline{E_2E_3} + \ldots + (-1)^n\, \overline{E_{n-1}E_n} = d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \ldots + (-1)^n d_{n+1} =$$

$$d_1 - \frac{3}{5}d_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 d_1 + \ldots + (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n d_1 =$$

$$d_1\left[1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n\right].$$

Quindi $\overline{AE_n}$ è una somma i cui termini sono in progressione geometrica di ragione $q = -\frac{3}{5}$ e primo termine d_1. Passando al limite, otteniamo la distanza dal punto A al punto E, «occhio» della spirale, come serie geometrica:

$$\overline{AE} = \lim_{n \to +\infty} \overline{AE_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_1\left(-\frac{3}{5}\right)^n = d_1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \frac{d_1}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \left(\frac{80}{1 + \frac{3}{5}}\right)\text{cm} = \frac{80}{\frac{8}{5}} = 50\ \text{cm}.$$

Quindi, $\overline{AE} = 50$ cm.

Calcoliamo la lunghezza L della curva, muovendoci dal punto A al punto E. Ogni tratto di tale curva è una semicirconferenza di lunghezza $\pi r = \frac{\pi}{2}d$.

Indichiamo con $L_n = \frac{\pi}{2}d_n$ la lunghezza della semicirconferenza generica e otteniamo:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \ldots + L_n + \ldots = \frac{\pi}{2}d_1 + \frac{\pi}{2}d_2 + \frac{\pi}{2}d_3 + \ldots + \frac{\pi}{2}d_n + \ldots =$$

$$\frac{\pi}{2}d_1 + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{5}d_1 + \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 d_1 + \ldots + \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n d_1 + \ldots =$$

$$\frac{\pi}{2}d_1\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \ldots\right].$$

Quindi, L è la somma della serie geometrica di ragione $\frac{3}{5}$ e primo termine 40π e vale:

$$L = 40\pi \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 40\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = 40\pi \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}} = 100\pi\ \text{cm}.$$

10 Per calcolare il limite richiesto, osserviamo che le funzioni seno e coseno sono limitate e assumono valori compresi fra -1 e 1. Quindi, per $x \to +\infty$, si ha: $\cos^3\left(4x + \frac{\pi}{11}\right) \in [-1; 1]$ e $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{7}\right) \in [0; 1]$.

Il numeratore risulta, quindi, una funzione limitata, con valori compresi nell'intervallo $[-71; 75]$; il denominatore, invece, tende a $+\infty$. Pertanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 73\cos^3\left(4x + \frac{\pi}{11}\right)}{5x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{7}\right)} = 0.$$