PROVA D'ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2017

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A, B, C, come in figura 1.

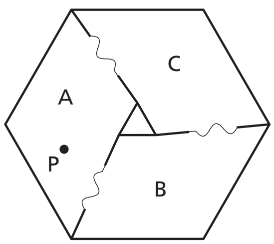


Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.
Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in A, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).
Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1. Dimostrare che

$$p_1(x) = (1-x)^2,\ p_2(x) = 2x(1-x)^2,\ p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$

e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0;1]$.

2. È vero che, qualunque sia $x \in [0;1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0,3 e almeno una deve essere minore di 0,4?

3. Provare che esiste un unico $x_0 [0;1]$ tale che:

$$p_1(x_0) = p_3(x_0)$$

e stabilire se vale la disuguaglianza:

$$x_0 > \frac{1}{2}.$$

Discutere inoltre, al variare di x in [0; 1], quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

4. Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = \frac{1}{2}$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?

PROBLEMA 2

Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x)\sin(2x).$$

1. Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.
2. Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.
3. Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k intero)? Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x? Motiva le tue risposte.
4. Determina il valore di
$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$
e, posto
$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$$
dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H?

QUESTIONARIO

1 Consideriamo la funzione $f(x) = e^{3-x}$. Preso un numero reale a, sia R_a la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa $x > a$ che sono compresi tra il grafico di f e l'asse x. Per quale valore di a l'area di R_a risulta pari a 2?

2 Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto (1; 0; 3) al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.

3 Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo [0; 2], è distribuita secondo la densità di probabilità data da $p(x) = k \cdot x^2(2 - x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata.

4 Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{3 - 2x}{x - 3} \right|.$$

Verificare se negli intervalli [0; 2] e [4; 6] valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a; b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

5 Sia $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Determinare $f^{(2017)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

6 Determinare la distanza tra il punto $P(6; 6; 8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}.$$

7 Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

8 Stabilire se le rette:

$$r\colon y = 5x - 6,\ s\colon y = 21x + 25$$

sono tangenti alla curva δ di equazione:

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

9 Data la funzione:

$$f(x) = x^2 + 1\ x \in \mathbb{R}$$

determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x \in [0; 3]$.

10 Trovare una funzione g, il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ g'''(0) = 1,\ g^{(4)}(0) = 1 \text{ e } g^{(5)}(0) = 1.$$

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

1. Compiliamo una tabella dove indichiamo, per ogni varco, se è aperto o chiuso, il numero di settori raggiungibili dalla pedina partendo da A, e la probabilità che tale evento si verifichi.
Poiché i sorteggi sono indipendenti, la probabilità che si verifichi una data combinazione di varchi aperti/chiusi è data dal prodotto $x^n(1-x)^m$, dove n è il numero di varchi aperti ed m il numero di varchi chiusi.

Varco *A-B*	**Varco *A-C***	**Varco *B-C***	**Numero settori raggiungibili a partire da *A***	**Probabilità**
aperto	aperto	aperto	3	x^3
aperto	aperto	chiuso	3	$x^2(1-x)$
aperto	chiuso	aperto	3	$x^2(1-x)$
aperto	chiuso	chiuso	2	$x(1-x)^2$
chiuso	aperto	aperto	3	$x^2(1-x)$
chiuso	aperto	chiuso	2	$x(1-x)^2$
chiuso	chiuso	aperto	1	$x(1-x)^2$
chiuso	chiuso	chiuso	3	$(1-x)^3$

Gli eventi sono indipendenti, quindi la probabilità che la pedina P, partendo da A, possa raggiungere solo un settore (cioè che non possa uscire dal settore A) è data dalla somma delle probabilità indicate in tabella corrispondenti alle righe «numeri settori = 1».
Otteniamo:

$$p_1(x) = x(1-x)^2 + (1-x)^3 = (1-x)^2(x+1-x) = (1-x)^2.$$

Analogamente, $p_2(x)$ è dato dalla somma delle probabilità indicate in tabella corrispondenti alle righe «numeri settori = 2»:

$$p_2(x) = x(1-x)^2 + x(1-x)^2 = 2x(1-x)^2.$$

Infine:

$$p_3(x) = x^3 + x^2(1-x) + x^2(1-x) + x^2(1-x) = x^3 + 3x^2(1-x).$$

Studiamo le tre funzioni per tracciare i loro grafici in uno stesso diagramma cartesiano nell'intervallo $[0; 1]$.

Tutte le funzioni sono polinomiali, quindi definite e derivabili in $[0; 1]$.

- $p_1(x) = (1-x)^2$ è una parabola di vertice $(1; 0)$ che volge la concavità verso l'alto; la parabola passa per il punto $(0; 1)$.
- $p_2(x) = 2x(1-x)^2 = 2x(1-2x+x^2) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$ è una cubica passante per $(0; 0)$ e per il punto di tangenza $(1; 0)$ ($x = 1$ è zero doppio).
  Per determinare il punto estremante in $]0; 1[$, calcoliamo la derivata prima:

  $$p_2'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1).$$

  Studiamo il segno:

  $$p_2'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3} \rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \vee x_2 = 1;$$

$p_2'(x) > 0$ e $p_2(x)$ crescente per $x < \frac{1}{3} \vee x > 1$;

$p_2'(x) < 0$ e $p_2(x)$ decrescente per $\frac{1}{3} < x < 1$.

$p_2(x)$ ammette quindi massimo relativo in $x = \frac{1}{3}$, con $p_2\left(\frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{27} - 4\frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.

La derivata seconda

$$p_2''(x) = 12x - 8$$

è positiva per

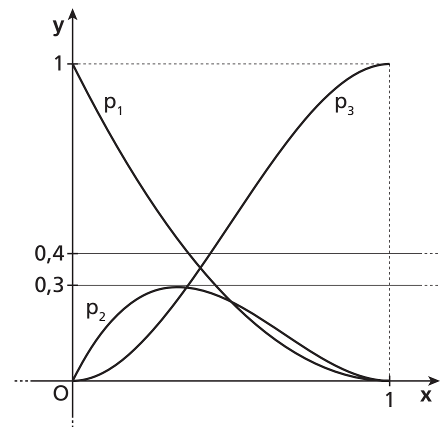
$$12x - 8 > 0 \rightarrow x > \frac{2}{3},$$

quindi $p_2(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x > \frac{2}{3}$ e verso il basso per $x < \frac{2}{3}$.

- $p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x) = x^2(x+3-3x) = x^2(3-2x) = -2x^3 + 3x^2$ è una cubica passante per (0; 0), che è punto di tangenza, e (1; 1).
  $p_3'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1-x)$ è positiva in]0; 1[, quindi la funzione è strettamente crescente.
  $p_3''(x) = -12x + 6$ si annulla in $x = \frac{1}{2}$ ed è positiva a sinistra e negativa a destra di $x = \frac{1}{2}$.
  $p_3(x)$ volge quindi la concavità verso l'alto per $x < \frac{1}{2}$ e verso il basso per $x > \frac{1}{2}$.

Possiamo disegnare i tre grafici.

2. Nel grafico precedente abbiamo disegnato anche le rette di equazione $y = 0{,}3$ e $y = 0{,}4$.
Osserviamo che la probabilità $p_2(x)$ è sempre minore di 0,4, poiché il massimo di $p_2(x)$ è $\frac{8}{27} \simeq 0{,}296 < 0{,}3 < 0{,}4$.
Quindi, per ogni $x \in [0;1]$, è vero che almeno una delle tre probabilità è minore di 0,4.
Inoltre, la quota del punto di intersezione fra i grafici di $p_1(x)$ e $p_3(x)$ risulta maggiore di 0,3, quindi rimane verificato anche che, per ogni $x \in [0;1]$, almeno una delle probabilità è maggiore di 0,3.



■ **Figura 2**

3. Dobbiamo verificare che l'equazione

$$p_1(x) = p_3(x) \rightarrow (1-x)^2 = -2x^3 + 3x^2 \rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

ammette una sola soluzione in [0; 1] o, in maniera equivalente, dobbiamo mostrare che la funzione

$$f(x) = p_1(x) - p_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

interseca l'asse x in un sol punto nell'intervallo [0; 1].
Determiniamo gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente o decrescente.

$$f'(x) = 6x^2 - 4x - 2 = 2(3x^2 - 2x - 1);$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 1.$$

Poiché $f'(x)$ è negativa per $-\frac{1}{3} < x < 1$, la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente in [0; 1].

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$, quindi per il primo teorema di unicità dello zero possiamo asserire che esiste un solo $x_0 \in\ ]0; 1[$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero tale che $p_1(x_0) = p_3(x_0)$.
Infine, poiché

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = -\frac{1}{4} < 0$$

e la funzione $f(x)$ è decrescente in [0; 1], deduciamo che lo zero x_0 di $f(x)$ deve trovarsi a sinistra di $\frac{1}{2}$, cioè deve essere $x_0 < \frac{1}{2}$.

Il valore di x_0 non lo riusciamo a calcolare in modo esatto per via elementare a partire dall'equazione $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Provando però con il valore 0,4 $\left(\text{che è minore di } \frac{1}{2}\right)$ troviamo

$$2 \cdot 0{,}4^3 - 2 \cdot 0{,}4^2 - 2 \cdot 0{,}4 + 1 \simeq 0{,}008,$$

quindi come prima approssimazione di x_0 possiamo considerare $x_0 \simeq 0{,}4$.

Mettiamo in evidenza nel disegno seguente le intersezioni dei tre grafici. In particolare:
x_0 è l'ascissa del punto di intersezione dei grafici di $p_1(x)$ e $p_3(x)$, come ricavato qui sopra;
x_1 è l'ascissa (non nulla) del punto di intersezione dei grafici di $p_2(x)$ e $p_3(x)$;
x_2 è l'ascissa (diversa da 1) del punto di intersezione dei grafici di $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

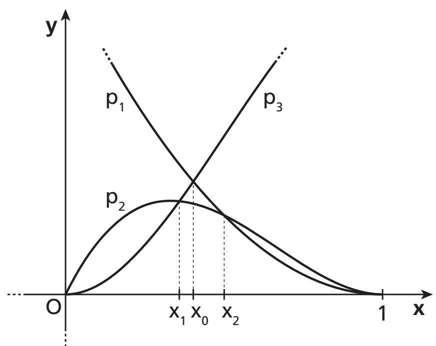


Figura 3

Ricaviamo x_1.

$$p_2(x) = p_3(x) \rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x = -2x^3 + 3x^2 \rightarrow 4x^3 - 7x^2 + 2x = 0 \rightarrow$$

$$x(4x^2 - 7x + 2) = 0 \xrightarrow[\text{non nulla}]{\text{soluzione}} 4x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} \rightarrow$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{17}}{8} \simeq 0{,}36 \vee x = \frac{7 + \sqrt{17}}{8} \simeq 1{,}39 \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{8} \simeq 0{,}36.$$

Ricaviamo x_2.

$$p_1(x) = p_2(x) \rightarrow (1 - x)^2 = 2x(1 - x)^2 \rightarrow$$

$$(2x - 1)(1 - x)^2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Siamo in grado di discutere, al variare di $x \in [0; 1]$, quali possibilità (numero di settori raggiungibili) sono più probabili e quali meno.

Probabilità maggiori:

- se $0 \leq x < x_0$, è più probabile raggiungere 1 settore;
- se $x_0 < x \leq 1$, è più probabile raggiungere 3 settori;
- se $x = x_0$, è ugualmente probabile raggiungere 1 o 3 settori, e tale probabilità è maggiore che raggiungere 2 settori.

Probabilità minori:

- se $0 < x < x_1$, è meno probabile raggiungere 3 settori;
- se $x_1 < x < x_2$, è meno probabile raggiungere 2 settori;
- se $x_2 < x < 1$, è meno probabile raggiungere 1 settore;
- se $x = 0 \vee x = x_1$, le probabilità inferiori di raggiungere 2 settori o 3 settori si equivalgono;
- se $x = x_2 \vee x = 1$, le probabilità inferiori di raggiungere 2 settori o 1 settore si equivalgono.

In particolare:

- se $x = 0$, tutti i varchi sono chiusi e si ha l'evento certo «la pedina P rimane in A»;
- se $x = 1$, tutti i varchi sono aperti e si ha l'evento certo «la pedina P può raggiungere tutti i settori».

4. In generale, il valore medio di una funzione integrabile $f(x)$ su un intervallo $[a; b]$ è dato da $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Nel caso delle tre probabilità troviamo:

$$m_1 = \int_0^1 p_1(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3};$$

$$m_2 = \int_0^1 p_2(x)dx = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{6};$$

$$m_3 = \int_0^1 p_3(x)dx = \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2)dx = \left[-\frac{x^4}{2} + x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Poniamo ora $x = \frac{1}{2}$ e consideriamo la variabile casuale S = «numero dei settori raggiungibili», che può assumere i valori $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $s_3 = 3$.
Le probabilità associate alla variabile S sono:

$$p_1 = p(S = 1) = p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = p(S = 2) = p_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$p_3 = p(S = 3) = p_3\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Il valore medio è:

$$m = s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 + s_3 \cdot p_3 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

La varianza è:

$$\text{var} = (s_1 - m)^2 \cdot p_1 + (s_2 - m)^2 \cdot p_2 + (s_3 - m)^2 \cdot p_3 =$$

$$\left(1 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16} = 0{,}6875.$$

PROBLEMA 2

1. Sia $g(x)$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e $f(x)=g(x)\cdot\sin(2x)$. Quindi anche $f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ perché prodotto di funzioni derivabili.
Osserviamo che se $g(x)=0$ anche $f(x)=0$ e le due funzioni sono tangenti $\forall x\in\mathbb{R}$, in particolare nei punti $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Possiamo supporre quindi $g(x)\neq 0$.

I grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti se sono contemporaneamente soddisfatte le due condizioni:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \to \begin{cases} g(x)\cdot\sin(2x)=g(x) \\ g'(x)\cdot\sin(2x)+g(x)\cdot 2\cos(2x)=g'(x) \end{cases}.$$

$g(x)\neq 0$, quindi dalla prima equazione ricaviamo $\sin(2x)=1 \to 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \to x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo l'identità $g'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cdot 1+g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cdot 0=g'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.
Concludiamo che i grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti per $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. L'equazione $g'(x)=-2g(x)$ è un'equazione differenziale a variabili separabili.
Osserviamo che la funzione identicamente nulla $g(x)=0$ è soluzione particolare dell'equazione differenziale ma non soddisfa la condizione iniziale.
Per $g\neq 0$ possiamo risolvere nel seguente modo:

$$\frac{1}{g}dg=-2dx \to \int\frac{1}{g}dg=\int -2dx \to \ln|g|=-2x+c \to$$

$$|g|=e^{-2x+c} \to g(x)=\pm e^{-2x+c} \to g(x)=\pm e^{c}\cdot e^{-2x} \to g(x)=h\cdot e^{-2x},$$

con h costante reale non nulla.

Imponiamo la condizione iniziale:

$$g(0)=4 \to h\cdot e^{-2\cdot 0}=4 \to h=4 \to g(x)=4e^{-2x}.$$

3. La funzione $f(x)$ da considerare è ora:

$$f(x)=4e^{-2x}\cdot\sin(2x).$$

Se i punti di ascissa $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ sono massimi relativi deve essere $f'(x)=0$.
Come verificato prima, il grafico di $f(x)$ è tangente a quello di $g(x)$ nei punti di ascissa $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, quindi se $f'(x)=0$ anche $g'(x)=0$, ovvero se $g'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=0$.
Poiché $g'(x)=-8e^{-2x}$ assume sempre valori negativi e non si annulla mai, deduciamo che $f(x)$ non ha massimi relativi in $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.
Per quanto riguarda i flessi, determiniamo in quali punti il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x:

$$f(x)=0 \to 4e^{-2x}\cdot\sin(2x)=0 \xrightarrow{e^{-2x}\neq 0} \sin(2x)=0 \to 2x=k\pi \to x=k\frac{\pi}{2}.$$

La funzione $f(x)$ presenta dei flessi in tali punti se in corrispondenza la derivata seconda si annulla:

$$f'(x)=-8e^{-2x}\cdot\sin(2x)+8e^{-2x}\cos(2x)=8e^{-2x}[\cos(2x)-\sin(2x)];$$

$$f''(x)=-16e^{-2x}[\cos(2x)-\sin(2x)]+8e^{-2x}[-2\sin(2x)-2\cos(2x)]=-32e^{-2x}\cos(2x);$$

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-32e^{-2k\frac{\pi}{2}}\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right)=-32e^{-k\pi}\cos(k\pi).$$

In particolare:

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è pari, } f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=+32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è dispari.}$$

In ogni modo, la derivata seconda non si annulla nei punti di ascissa $x = k\frac{\pi}{2}$ e quindi la funzione $f(x)$ non ha flessi in tali punti.

4. Consideriamo l'integrale improprio

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t 4e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=\lim_{t\to+\infty}\left[4\cdot\int_0^t e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx\right]$$

e calcoliamo a parte l'integrale indefinito.
Pensando e^{-2x} come fattore differenziale e $\sin(2x)$ come fattore finito, troviamo:

$$\int e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=$$

$$-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\cdot\sin(2x)-\int e^{-2x}\cdot 2\cos(2x)dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}\cdot\cos(2x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\cdot\cos(2x)+\int e^{-2x}\cdot 2\sin(2x)dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\cos(2x)-\int e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx,$$

da cui:

$$2\int e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\cos(2x) \ \to$$

$$\int e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=-\frac{1}{4}e^{-2x}[\sin(2x)+\cos(2x)]+e.$$

Possiamo calcolare l'integrale definito:

$$4\cdot\int_0^t e^{-2x}\cdot\sin(2x)dx=[-e^{-2x}[\sin(2x)+\cos(2x)]]_0^t=$$

$$\{-e^{-2t}[\sin(2t)+\cos(2t)]\}-\{-e^{-2\cdot 0}[\sin(2\cdot 0)+\cos(2\cdot 0)]\}=$$

$$1-e^{-2t}[\sin(2t)+\cos(2t)].$$

Infine, l'integrale improprio risulta:

$$I=\lim_{t\to+\infty}\{1-e^{-2t}[\sin(2t)+\cos(2t)]\}=1.$$

Nell'ultimo passaggio si ha

$$\lim_{t\to+\infty}\{-e^{-2t}[\sin(2t)+\cos(2t)]\}=0$$

perché si tratta del limite del prodotto fra un infinitesimo e una funzione limitata.
Valutiamo il comportamento di

$$H=\int_0^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Innanzi tutto osserviamo che vale

$$|f(x)|=|4e^{-2x}\cdot\sin(2x)|=4e^{-2x}|\sin(2x)|,$$

quindi vale la catena di disuguaglianze:

$$f(x) < |f(x)| < 4e^{-2x}.$$

Passando agli integrali otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx < \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx \;\rightarrow\; 1 < \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx.$$

poiché il primo integrale della catena rappresenta $I = 1$.
D'altro canto, l'ultimo integrale della disuguaglianza vale:

$$\int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty} [-2e^{-2x}]_0^t =$$

$$\lim_{t\to+\infty} (-2e^{-2t} + 2) = 2.$$

L'integrale H risulta dunque finito e il suo valore è compreso fra 1 e 2:

$$1 < H < 2.$$

Interpretiamo gli integrali dal punto di vista geometrico.

Il grafico di $f(x)$ in $[0; +\infty[$ individua infinite regioni di piano alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse, ciascuna limitata e di area finita.

Il valore I rappresenta la sommatoria delle aree di tali regioni, considerate col segno positivo se al di sopra dell'asse x e col segno negativo se al di sotto dell'asse x.
Il grafico di $|f(x)|$ individua infinite regioni di piano che si trovano tutte al di sopra dell'asse x. Quindi, per calcolare H, l'area di tutte le regioni viene considerata col segno positivo.

Rappresentiamo in figura la situazione.
Per disegnare il grafico approssimativo di $f(x) = 4e^{-2x} \cdot \sin(2x)$ senza effettuare lo studio della funzione, possiamo osservare che esso è compreso fra i grafici di $y = 4e^{-2x}$ e di $y = -4e^{-2x}$, dove l'oscillazione è individuata da $y = \sin(2x)$.

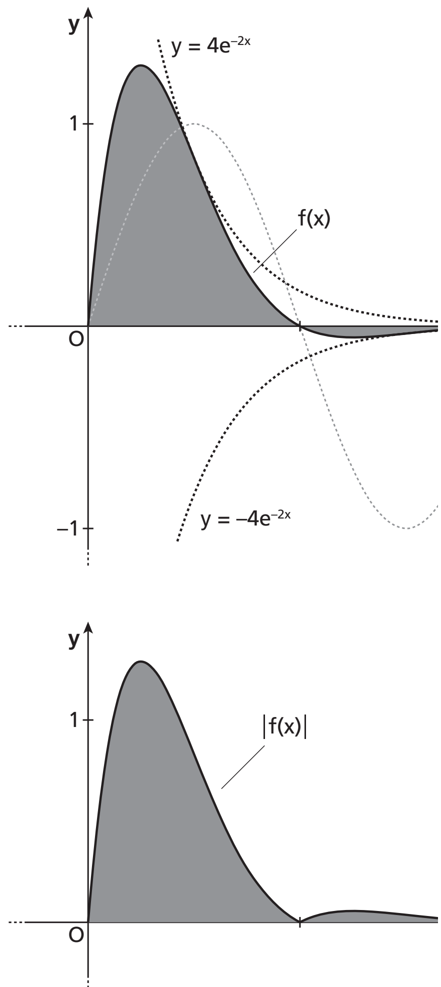


Figura 4

QUESTIONARIO

1 Rappresentiamo la situazione in figura.
Il grafico di $f(x) = e^{3-x}$ si ottiene ribaltando rispetto all'asse y quello di $y = e^x$ e traslando verso destra di 3 unità.

Calcoliamo l'area della regione R_a in funzione di a:

$$\int_a^{+\infty} e^{3-x}dx = -\lim_{t\to+\infty}\int_a^t -e^{3-x}dx = -\lim_{t\to+\infty}\left[e^{3-x}\right]_a^t =$$

$$-\lim_{t\to+\infty}\left(e^{3-x} - e^{3-a}\right) = e^{3-a}.$$

Imponiamo che tale area sia 2:

$$e^{3-a} = 2 \;\rightarrow\; 3 - a = \ln 2 \;\rightarrow\; a = 3 - \ln 2 \simeq 2{,}31.$$

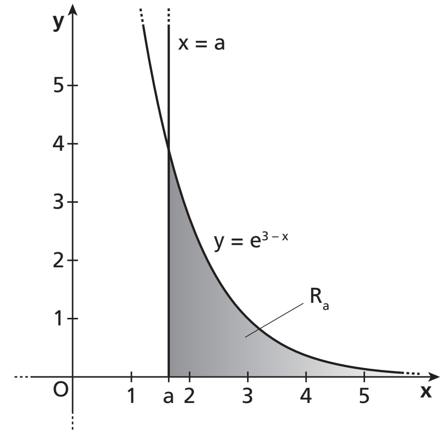


Figura 5

2 Le rette perpendicolari al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$ hanno vettore di direzione $(3; 2; -1)$, dato dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano.
Fra tali rette perpendicolari, individuiamo quella passante per il punto (1; 0; 3); con la forma parametrica troviamo:

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 0 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 3 - k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo le equazioni in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x-1}{3} \\ k = \dfrac{y}{2} \\ k = 3 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x-1}{3} = 3 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 3z - 10 = 0 \end{cases}.$$

3 La funzione $p(x) = kx^2(2-x)$ definisce una densità di probabilità sull'intervallo [0; 2] se è sempre positiva o nulla su tale intervallo e se

$$\int_0^2 p(x)dx = 1.$$

Per la positività, deve essere $k \geq 0$.
Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^2 p(x)dx = k\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = k\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = k\left(\frac{2}{3}8 - \frac{1}{4}16\right) = \frac{4}{3}k.$$

Imponiamo che tale integrale definito sia uguale a 1:

$$\frac{4}{3}k = 1 \;\rightarrow\; k = \frac{3}{4}.$$

La densità di probabilità su [0; 2] è quindi definita da:

$$p(x) = \frac{3}{4}x^2(2-x).$$

Il valor medio della variabile casuale associata è dato da:

$$M = \int_0^2 x\cdot p(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}16 - \frac{1}{5}32\right) = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

4 La funzione $f(x) = \left| \dfrac{3-2x}{x-3} \right|$ si ottiene passando al valore assoluto della funzione omografica $h(x) = \dfrac{3-2x}{x-3}$, che è un'iperbole di asintoti $x = 3$ e $y = -2$ passante per i punti $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ e $(0; -1)$, come mostrato in figura.

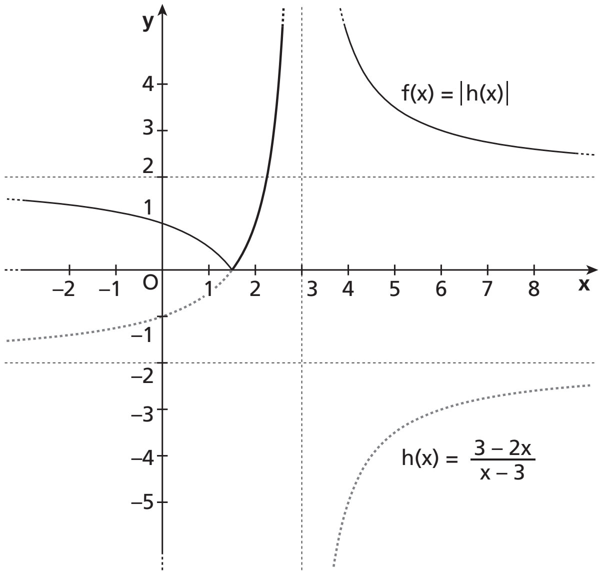


Figura 6

La funzione $f(x)$ presenta dunque gli asintoti $x = 3$ e $y = 2$, è continua nel dominio $x \neq 3$ e ha un punto angoloso di ascissa $x_0 = \dfrac{3}{2}$. Non soddisfa quindi il teorema di Lagrange in [0; 2], perché in]0; 2[ha un punto di non derivabilità.
La funzione soddisfa invece il teorema in [4; 6], dove risulta derivabile. In tale intervallo deve quindi esistere un punto c tale che:

$$\frac{f(6) - f(4)}{6-4} = f'(c).$$

Poiché in [4; 6] possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-3} \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-3)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+3}{(x-3)^2} = -\frac{3}{(x-3)^2}, \text{ da cui:}$$

$$\frac{\dfrac{2 \cdot 6 - 3}{6-3} - \dfrac{2 \cdot 4 - 3}{4-3}}{6-4} = -\frac{3}{(c-3)^2} \rightarrow -1 = -\frac{3}{(c-3)^2} \rightarrow (c-3)^2 = 3 \rightarrow c = 3 \pm \sqrt{3} \rightarrow$$

$$c = 3 + \sqrt{3} \simeq 4{,}73.$$

Non esiste alcun intervallo $[a; b]$ dove valga il teorema di Rolle.
In tale intervallo, infatti, dovrebbero valere le tre condizioni:

- $f(a) = f(b)$;
- $f(x)$ continua in $[a; b]$;
- $f(x)$ derivabile in $]a; b[$.

Come si deduce dalla figura a pagina seguente, gli intervalli $[a; b]$ per i quali è $f(a) = f(b)$ sono tali che $a < \dfrac{3}{2} < b$ oppure $a < 3 < b$ (sono individuati dall'intersezione del grafico di $f(x)$ con rette parallele all'asse x).

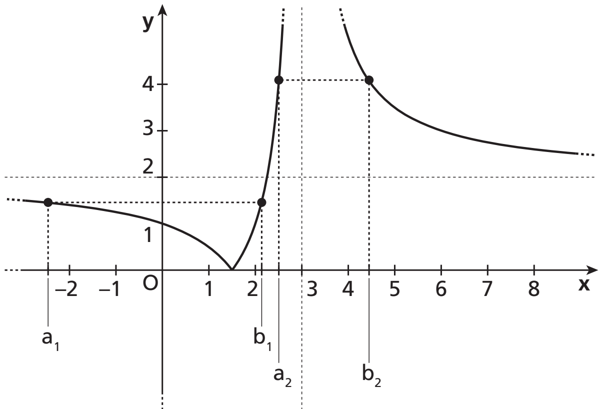


Figura 7

Nel primo tipo di intervallo la funzione non è derivabile in $x_0 = \frac{3}{2}$, nel secondo la funzione non è continua (e quindi derivabile) in $x = 3$. In entrambi i casi, quindi, non possiamo applicare il teorema di Rolle.

5 Le derivate delle funzioni goniometriche elementari si ripetono uguali ogni 4 gradi di derivazione. Se $y(x) = \sin x$, per esempio, abbiamo:

$$y^{(0)}(x) = \sin x,\ y^{(1)}(x) = \cos x,\ y^{(2)}(x) = -\sin x,\ y^{(3)}(x) = -\cos x,\ y^{(4)}(x) = \sin x,$$

e in generale sarà $y^{(n)}(x) = y^{(n+4)}(x)$.
La funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ è data dalla somma di due funzioni goniometriche elementari, quindi anche le sue derivate si ripetono uguali ogni 4 gradi di derivazione.
Dato che $2017 = 504 \cdot 4 + 1$, risulta:

$$f^{(2017)}(x) = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x - \sin x.$$

6 La distanza di $P(6; 6; 8)$ dalla retta

$$r: \begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

coincide con la distanza di P dal punto Q individuato dall'intersezione fra r e il piano α passante per P e perpendicolare a r.
Cerchiamo le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2z + y + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2k + k \\ y + 1 = k \\ z = k \end{cases} \to \begin{cases} x = 3k \\ y = k - 1, \text{ con } k \in \mathbb{R}. \\ z = k \end{cases}$$

Il piano α passante per P e perpendicolare a r è dato allora da:

$$3 \cdot (x - 6) + 1 \cdot (y - 6) + 1 \cdot (z - 8) = 0 \to 3x + y + z - 32 = 0.$$

Determiniamo l'intersezione Q fra r e α:

$$3(3k) + (k - 1) + k - 32 = 0 \to 9k + k - 1 + k - 32 = 0 \to 11k = 33 \to k = 3$$

da cui:

$$Q: \begin{cases} x = 3 \cdot 3 \\ y = 3 - 1 \\ z = 3 \end{cases} \to Q(9; 2; 3).$$

La distanza cercata $\overline{PQ}$ è uguale a:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(9-6)^2 + (2-6)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

7 A ogni lancio del dado, Alberto ha probabilità $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ di fare un punto, mentre Barbara ha probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ di fare 2 punti.

Possiamo calcolare la probabilità che sia Alberto sia Barbara realizzino almeno un punto in una partita mediante la tecnica dell'evento contrario.

Alberto fa zero punti se Barbara vince 3 lanci consecutivi (totalizzando $2 + 2 + 2 = 6$ punti), e questo avviene con probabilità:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Con ragionamento analogo, Barbara fa zero punti se Alberto vince 6 lanci consecutivi, con probabilità:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}.$$

La probabilità che Alberto e Barbara realizzino ciascuno almeno un punto in una partita è allora data da:

$$1 - \left(\frac{1}{27} + \frac{64}{729}\right) = 1 - \frac{27 + 64}{729} = 1 - \frac{91}{729} = \frac{729 - 91}{729} = \frac{638}{729} \simeq 0{,}875.$$

Per quanto riguarda la probabilità che, a un certo punto della partita, il punteggio sia di 4 a 4, osserviamo che tale situazione avviene se Alberto ha vinto 4 lanci e Barbara 2 lanci. Su 6 lanci, quindi, Alberto deve aver vinto esattamente 4 volte. Poiché la distribuzione è binomiale, possiamo calcolare questa probabilità p col teorema delle prove ripetute:

$$p = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = 5 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{243} \simeq 0{,}33.$$

8 La retta r di equazione $r(x) = 5x - 6$ è tangente al grafico di $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ se retta e grafico hanno un punto in comune e se in tale punto il coefficiente angolare è lo stesso, cioè deve essere soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} r(x) = f(x) \\ r'(x) = f'(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 6 = x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ 5 = 3x^2 - 4x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3} \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \vee x_2 = 2.$$

Verifichiamo se tali valori sono soluzione anche della prima equazione, quella di terzo grado:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 7 = 0 \rightarrow -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 7 = 0 \rightarrow \frac{229}{27} = 0 \rightarrow \text{FALSO};$$

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 0 \rightarrow 8 - 8 - 8 + 7 = 0 \rightarrow -1 = 0 \rightarrow \text{FALSO};$$

quindi la retta r non è tangente al grafico di $f(x)$ in alcun punto.

Ripetiamo il procedimento per la retta s di equazione $s(x) = 21x + 25$:

$$\begin{cases} s(x) = f(x) \\ s'(x) = f'(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 21x + 25 = x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ 21 = 3x^2 - 4x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x - 24 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 20 = 0 \end{cases};$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{3} = \frac{2 \pm 8}{3} \rightarrow x_3 = -2 \vee x_4 = \frac{10}{3};$$

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 - 20(-2) - 24 = 0 \rightarrow -8 - 8 + 40 - 24 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{VERO};$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{10}{3}\right) - 24 = 0 \rightarrow \frac{1000}{27} - \frac{200}{9} - \frac{200}{3} - 24 = 0 \rightarrow \text{FALSO}.$$

Quindi la retta s è tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa -2.

9 Rappresentiamo la situazione in figura.

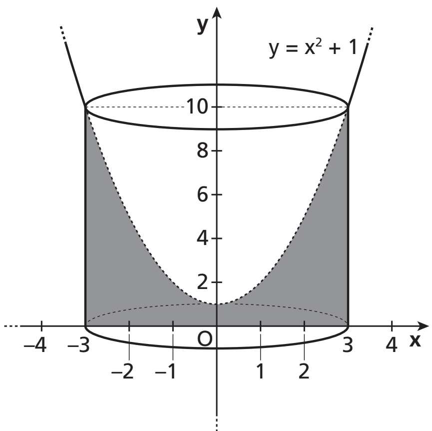


Figura 8

Il volume del solido individuato dalla rotazione attorno all'asse y della regione sottesa al grafico di $f(x) = x^2 + 1$ nell'intervallo [0; 3] si può ricavare col metodo dei gusci cilindrici:

$$V = 2\pi \int_0^3 x f(x)dx = 2\pi \int_0^3 (x^3 + x)dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 2\pi \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} \right) = \frac{99}{2}\pi \simeq 155,5.$$

10 Cerchiamo la funzione $g(x)$ fra le funzioni polinomiali di grado 5 (perché 5 è l'ordine maggiore della derivata non nulla in $x = 0$):

$$g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Deriviamo la funzione $g(x)$ fino al quinto ordine:

$$g'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e,$$

$$g''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d,$$

$$g'''(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c,$$

$$g^{(4)}(x) = 120ax + 24b,$$

$$g^{(5)}(x) = 120a,$$

e risolviamo il sistema individuato dalle 6 condizioni fornite:

$$\begin{cases} g(0) = 0,\, g'(0) = 0,\, g''(0) = 0 \\ g'''(0) = 1,\, g^{(4)}(0) = 1,\, g^{(5)}(0) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} f = 0,\, e = 0,\, 2d = 0 \\ 6c = 1,\, 24b = 1,\, 120a = 1 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} f = 0,\, e = 0,\, d = 0 \\ c = \dfrac{1}{6},\, b = \dfrac{1}{24},\, a = \dfrac{1}{120} \end{cases}.$$

La funzione cercata è dunque:

$$g(x) = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

che è definita su $\mathbb{R}$ e quindi su ogni intervallo contenente 0.