PROVA D'ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2018

Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

Lo studente risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

PROBLEMA 1

Sia dato un sistema di assi cartesiani Oxy in cui l'unità corrisponde a 1 metro. Una particella puntiforme si muove lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo, partendo dall'origine, con una velocità di 2 metri al secondo. Quando la particella si trova in un generico punto $x = a$, costruisci un triangolo prendendo le tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a.

1. Determina l'area del triangolo in funzione di a; quanto vale l'area del triangolo dopo 5 secondi?
2. Dopo quanti secondi il triangolo diventa equilatero?
3. Esprimi in funzione di a l'angolo θ formato dalle due tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a; utilizzando l'espressione di θ in funzione di a, verifica la correttezza della risposta che hai fornito al punto precedente.
4. Quando la particella si trova nel generico punto $x = a$, determina l'area della superficie limitata superiormente dalle due rette tangenti e inferiormente dalla curva di equazione $y = ax - x^2$.

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

   $$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x)),$$

   stabilisci se si verifica $a(x) = b(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.
3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
   Determina l'area di A e il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1 Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0; 0)$ e $B(\pi; 0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4\sin x$, con $0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB.

2 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[p; 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p. Determinare, al variare di p, le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3 Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1; -1; 2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

4 Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$.

5 Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?

6 Data la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

7 Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.

8 Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0; 10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x \leq 10 \end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9 Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x; y; z)$ equidistanti dai punti $A(0; 1; 2)$ e $B(-3; 2; 0)$.
Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k.

10 Verificare che la funzione $y = e^{-x}\sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

PROBLEMA 1

1. La particella si muove lungo l'asse positivo delle ascisse, quindi il parametro a è positivo.
Per ogni $a > 0$, dunque, la parabola di equazione $p(x) = ax - x^2 = x(a-x)$ volge la concavità verso il basso e interseca l'asse delle ascisse nell'origine (0; 0) e in (a; 0). L'asse di simmetria della parabola è $x = \frac{a}{2}$ e il vertice V ha coordinate $V\left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{4}\right)$.

Nell'origine la retta tangente alla parabola ha equazione:

$$y - \underbrace{p(0)}_{0} = \underbrace{p'(0)}_{p'(x) = a - 2x,\ p'(0) = a} \cdot (x - 0) \rightarrow y = ax,$$

mentre nel punto (a; 0) la retta tangente alla parabola ha equazione:

$$y - \underbrace{p(a)}_{0} = \underbrace{p'(a)}_{p'(0) = -a} \cdot (x - a) \rightarrow y = -ax + a^2.$$

Rappresentiamo la situazione in figura.

Le due rette tangenti si intersecano nel punto di coordinate:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = -ax + a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = ax \\ ax = -ax + a^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = ax \\ x = \frac{a}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{a^2}{2} \\ x = \frac{a}{2} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{2}\right).$$

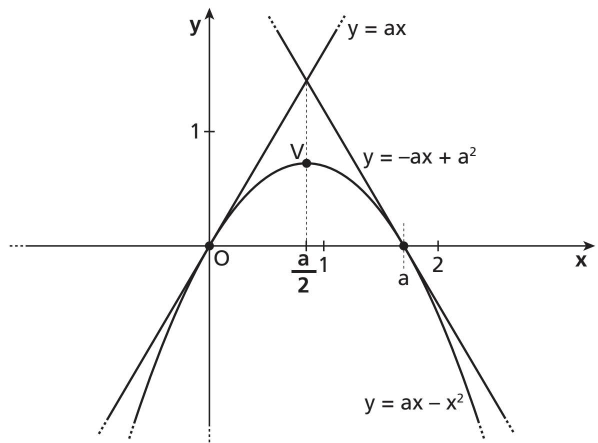


Figura 1

Il triangolo isoscele delimitato dalle rette tangenti alla parabola e dall'asse x ha dunque base lunga a e altezza lunga $\frac{a^2}{2}$; la sua area (espressa in metri quadrati) vale:

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

La particella si muove con velocità costante di 2 m/s partendo dall'origine, quindi con legge oraria $x = 2t$; dopo 5 s la particella si trova pertanto nel punto di ascissa $x = 2 \cdot 5 = 10$; l'area del triangolo corrispondente è:

$$A(10) = \frac{10^3}{4} = 250 \text{ m}^2.$$

2. Il triangolo è equilatero se l'altezza h e il lato l sono legati dalla relazione $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Imponiamo che tale relazione sia verificata nel nostro caso, dove il lato di base misura a e l'altezza $\frac{a^2}{2}$:

$$\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \rightarrow a^2 = \sqrt{3}\,a \rightarrow a = \sqrt{3}.$$

La particella si trova nel punto di ascissa $a = \sqrt{3}$ dopo un tempo t (in secondi) così determinato:

$$\sqrt{3} = 2t \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866 \text{ s.}$$

Riassumendo, dopo $\frac{\sqrt{3}}{2}$ secondi dall'inizio del moto il triangolo è equilatero.

3. Il coefficiente angolare m di una retta e l'angolo α che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse sono legati dalla relazione:

$$m = \tan\alpha, \text{ con } 0 \leq \alpha < \pi.$$

Per la definizione della funzione inversa arcotangente, risulta α acuto 0 se $m > 0$ e α ottuso 0 se $m < 0$.
Nel nostro caso la retta di equazione $y = ax$ ha coefficiente angolare $m = a > 0$, forma l'angolo acuto α con l'asse delle ascisse e $\tan\alpha = m = a$.
L'angolo θ individuato dalle rette tangenti e interno al triangolo isoscele considerato è dato da:

$$\theta = \pi - 2\alpha,$$

da cui:

$$\tan\theta = \tan(\pi - 2\alpha) \rightarrow \tan\theta = -\tan(2\alpha)$$

e per la formula di duplicazione per la tangente:

$$\tan\theta = -\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \rightarrow \tan\theta = \frac{2a}{a^2 - 1} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right), \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \alpha \neq \frac{\pi}{4}, \text{ cioè } a \neq 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Quindi, poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $a = \tan\alpha > 0$, si ha:

- $0 < a < 1 \rightarrow \tan\theta < 0 \rightarrow \theta$ è ottuso;
- $a > 1 \rightarrow \tan\theta > 0 \rightarrow \theta$ è acuto.

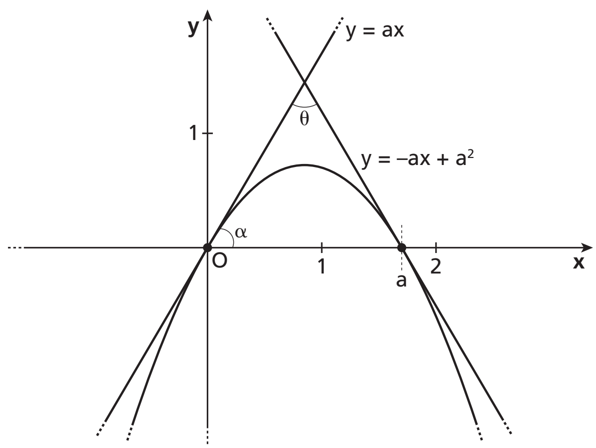


Figura 2

Il triangolo delimitato dalle rette tangenti e dall'asse x è equilatero se $\theta = \frac{\pi}{3}$; imponiamo tale condizione:

$$\tan\frac{\pi}{3} = -\frac{2a}{1 - a^2} \rightarrow \sqrt{3} = -\frac{2a}{1 - a^2} \rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}a^2 = -2a \rightarrow \sqrt{3}a^2 - 2a - \sqrt{3} = 0;$$

$$a = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 3}}{\sqrt{3}} = \frac{+1 \pm 2}{\sqrt{3}} \rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ non accettabile} \vee a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Abbiamo riottenuto il risultato $a = \sqrt{3}$ come nel caso precedente; come già calcolato, la particella si troverà nella posizione $x = \sqrt{3}$ dopo il tempo t dato da:

$$\sqrt{3} = 2t \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ s.}$$

4. Calcoliamo l'area A della superficie del primo quadrante compresa fra la parabola e le rette tangenti. Poiché la superficie è simmetrica rispetto all'asse della parabola, di equazione $x = \frac{a}{2}$, l'area cercata è data dall'integrale:

$$A = 2\int_0^{\frac{a}{2}} [ax - (ax - x^2)]\, dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{12}.$$

PROBLEMA 2

1. La funzione $f_k(x) = k \ln x$, con $k > 0$, è definita per $x > 0$ e ha per insieme immagine l'insieme dei reali.

   La funzione $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ è definita per tutti gli x reali e ha per insieme immagine l'insieme $]0; +\infty[$.
   Dire che le due funzioni sono inverse equivale ad asserire che la loro composizione dà la funzione identità; verifichiamo se ciò accade.

   - La funzione composta $a(x) = (f_k \circ g_k)(x)$ esiste poiché l'immagine di $g_k(x)$ è contenuta nel dominio di $f_k(x)$ e risulta:

     $$a(x) = f_k(g_k(x)) = f_k\left(e^{\frac{x}{k}}\right) = k \ln e^{\frac{x}{k}} = k \cdot \frac{x}{k} \ln e = x, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

     Quindi $a(x)$ è la funzione identica su $\mathbb{R}$.
   - La funzione composta $b(x) = (g_k \circ f_k)(x)$ esiste poiché l'immagine di $f_k(x)$ è contenuta nel dominio di $g_k(x)$ e risulta:

     $$b(x) = g_k(f_k(x)) = g_k(k \ln x) = e^{\frac{k \ln x}{k}} = e^{\ln x} = x, \text{ con } x > 0.$$

     Quindi $b(x)$ è la funzione identica definita per $x > 0$.

   L'uguaglianza $a(x) = b(x)$ non è verificata per ogni x reale, perché non è definita per $x \leq 0$:

   $a(x) = b(x)$ solo per $x > 0$.

2. Considerata la funzione $f_2(x) = 2 \ln x$, determiniamo la retta s_2 tangente al suo grafico F_2 e parallela alla retta di equazione $y = x$.

   La retta s_2 ha dunque coefficiente angolare uguale a 1 e da $f_2'(x) = \frac{2}{x}$ ricaviamo:

   $$f_2'(x) = 1 \rightarrow \frac{2}{x} = 1 \rightarrow x = 2.$$

   La retta s_2 tangente a F_2 nel suo punto di ascissa $x = 2$ ha dunque equazione:

   $$y = f_2'(2) \cdot (x - 2) + f_2(2) \rightarrow y = (x - 2) + 2 \ln 2 \rightarrow y = x + 2 \ln 2 - 2.$$

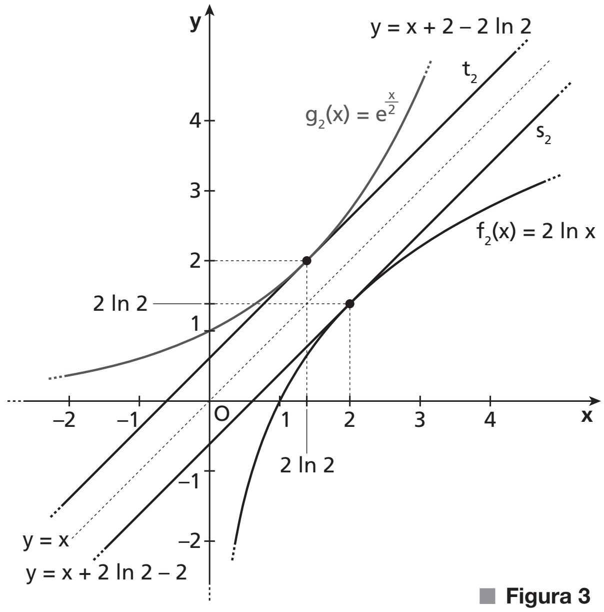
   In modo analogo, data la funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$, anche la retta t_2 tangente al suo grafico G_2 e parallela alla retta di equazione $y = x$ ha coefficiente angolare uguale a 1 e da $g_2'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ ricaviamo:

   $$g_2'(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = 1 \rightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2 \rightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} = \ln 2 \rightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \rightarrow x = 2 \ln 2.$$

   La retta t_2 tangente a G_2 nel suo punto di ascissa $x = 2 \ln 2$ ha dunque equazione:

   $$y = g_2'(2 \ln 2)(x - 2 \ln 2) + g_2(2 \ln 2) \rightarrow y = (x - 2 \ln 2) + 2 \rightarrow y = x + 2 - 2 \ln 2.$$

Alternativamente, poiché g_2 è l'inversa di f_2 e i grafici corrispondenti sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, avremmo potuto ricavare l'equazione di t_2 da quelle di s_2 scambiando x e y.



■ **Figura 3**

Rappresentiamo i grafici F_2 e G_2 e le rette tangenti s_2 e t_2.

Anziché studiare le funzioni per tracciare i grafici, osserviamo che:

- F_2 si ottiene dal grafico di $y = \ln x$ mediante dilatazione verticale di fattore 2;
- G_2 si ottiene dal grafico di $y = e^x$ mediante dilatazione orizzontale di fattore 2.

Inoltre le coordinate approssimate dei punti di tangenza $(2; 2\ln 2)$ e $(2\ln 2; 2)$ (per un'idea immediata di dove collocare tali punti) valgono:

$(2; 1,4)$ e $(1,4; 2)$

Disegniamo dunque i grafici richiesti.

Osservando i grafici, deduciamo che la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto G_2 è pari alla distanza fra i due punti di tangenza $(2; 2\ln 2)$ e $(2\ln 2; 2)$.

Quindi: $d_{\text{minima}} = \sqrt{(2\ln - 2)^2 + (2 - 2\ln 2)^2} = \sqrt{2(2\ln 2 - 2)^2} = \sqrt{2}\,(2\ln 2 - 2)$.

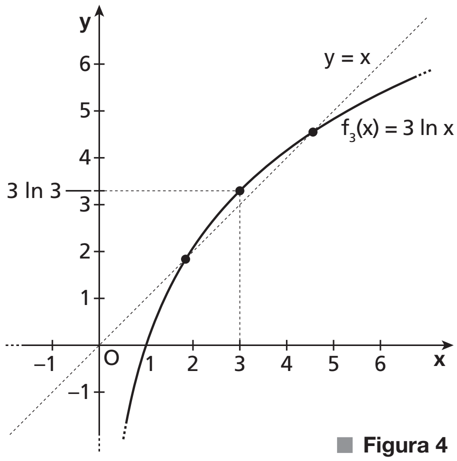
3. L'informazione nota che, per qualunque $k > 0$, gli eventuali punti di intersezione fra i grafici F_k e G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$, equivale a dire che in tali punti di intersezione il valore assunto dalle funzioni $f_k(x)$ e $g_k(x)$ coincide con l'ascissa del punto stesso. Anziché considerare l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$, quindi, possiamo considerare il sistema:

$$\begin{cases} f_3(x) = x \\ g_3(x) = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\ln x = x \\ e^{\frac{x}{3}} = x \end{cases}.$$

Osserviamo che se α è una soluzione di un'equazione del sistema, per esempio della prima equazione, cioè $3\ln\alpha = \alpha$, allora α anche soluzione della seconda equazione, infatti:

$$3\ln\alpha = \alpha \rightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha}{3} \rightarrow e^{\ln a} = e^{\frac{\alpha}{3}} \rightarrow \alpha = e^{\frac{\alpha}{3}}.$$

Non rimane che verificare che tale sistema ammette due soluzioni, ovvero che la prima (o la seconda) equazione ammette due soluzioni.
Consideriamo dunque l'equazione $3\ln x = x$ e verifichiamo che ha due soluzioni, interpretando l'equazione come l'intersezione dei grafici di $f_3(x)$ e di $i(x) = x$.



■ **Figura 4**

- La funzione $y = 3\ln x$ è una funzione crescente, definita per $x > 0$, con la concavità rivolta sempre verso il basso.
- Per $x \to 0$ è $3\ln x < x$ (perché $3\ln x \to -\infty$) e $x \to 0$) e anche per $x \to +\infty$ è $3\ln x < x$ (per gli ordini di infinito).
- Determiniamo il punto in cui F_3 ha retta tangente parallela a $y = x$:

  $$f_3'(x) = 1 \to \frac{3}{x} = 1 \to x = 3.$$

  Per $x = 3$ è $f_3(3) = 3\ln 3 > 3 = i(3)$.

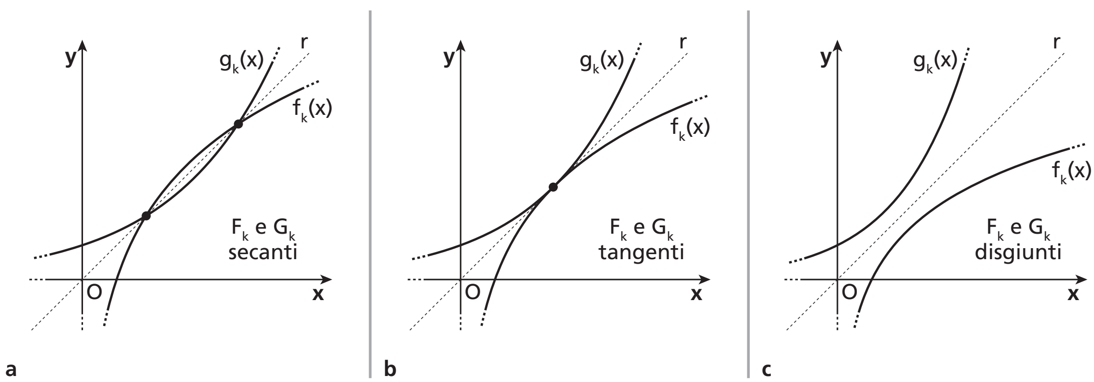
La situazione è rappresentata in figura.

Poiché le funzioni $y = 3\ln x$ e $y = x$ sono continue, l'equazione $3\ln x = x$ deve ammettere due soluzioni (come conseguenza del teorema di esistenza degli zeri) e, per i ragionamenti fatti, possiamo infine affermare che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ ha due soluzioni.

Più in generale possiamo affermare:

- se il grafico F_k interseca la retta r di equazione $y = x$, allora il grafico G_k, che è simmetrico di F_k rispetto a r, interseca la retta negli stessi punti e i due grafici F_k e G_k sono secanti;
- se il grafico F_k è tangente alla retta r, allora anche il grafico G_k è tangente a r e i due grafici F_k e G_k risultano fra di loro tangenti;
- se il grafico F_k non interseca la retta r, allora nemmeno il grafico G_k la interseca e i due grafici F_k e G_k risultano disgiunti.

Rappresentiamo le tre situazioni in figura.



■ **Figura 5**

Per quanto visto fin qui sappiamo che i due grafici F_2 e G_2 $(k = 2)$ sono disgiunti, mentre i due grafici F_3 e G_3 $(k = 3)$ sono secanti.

Determiniamo il valore di k per i quale i due grafici F_k e G_k sono tangenti (sarà $2 < k < 3$).

Se F_k e G_k sono tangenti, allora F_k è tangente alle retta r di equazione $y = x$, ovvero il punto T di F_k nel quale la tangente è parallela a r ha l'ascissa e l'ordinata uguali.

Cerchiamo il punto di F_k nel quale la tangente è parallela a r, cioè ha coefficiente angolare 1:

$$f_k'(x) = 1 \to \frac{k}{x} = 1 \to x = k.$$

Imponiamo che, per $x = k$, anche l'ordinata di $f_k(x)$ sia uguale a k:

$$f_k(x) = k \to k\ln k = k \to \ln k = 1 \to k = e.$$

Quindi, i due grafici F_k e G_k sono tangenti per $k = e$ nel punto $(e; e)$.

Possiamo concludere:

- se $0 < k < e$, i due grafici F_k e G_k sono disgiunti;
- se $k = e$, i due grafici F_k e G_k sono tangenti;
- se $k > e$, i due grafici F_k e G_k sono secanti.

4. Rappresentiamo in figura la situazione.

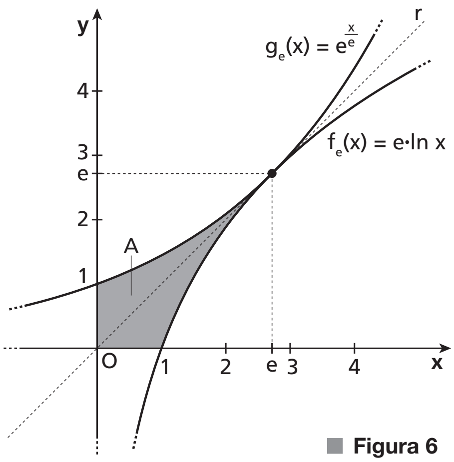


Figura 6

La regione A limitata compresa fra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi possiamo calcolare la sua area raddoppiando quella della regione compresa fra il grafico G_e e la bisettrice r nell'intervallo $[0; e]$:

$$\text{area}(A) = 2\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}} - x\right)dx = 2\left[e \cdot e^{\frac{x}{e}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^e =$$

$$2\left(e^2 - \frac{e^2}{2} - e\right) = 2\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = e^2 - 2e \simeq 1{,}95.$$

La regione A è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi i solidi che si generano ruotando A attorno all'asse x oppure attorno all'asse y sono congruenti e pertanto equivalenti.

Ruotiamo dunque la regione A attorno all'asse x. Il volume V del solido così generato può essere calcolato come differenza fra il volume del solido generato dalla rotazione di G_e (per $0 \le x \le e$) attorno all'asse x e il volume del solido generato dalla rotazione di F_e (per $1 \le x \le e$) sempre attorno all'asse x:

$$V = \pi\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}}\right)^2 dx - \pi\int_1^e (e\ln x)^2 dx = \pi\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi\int_1^e e^2 \ln^2 x\, dx = \pi\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi e^2 \int \ln^2 x\, dx.$$

Risolviamo per comodità separatamente gli integrali corrispondenti:

- $\int e^{\frac{2x}{e}} dx = \frac{e}{2}\int \frac{2}{e} e^{\frac{2x}{e}} dx = \frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}} + c,$

  quindi:

  $$\int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx = \left[\frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^e = \frac{e}{2} \cdot e^2 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}(e^2 - 1);$$

- $\int \ln^2 x\, dx = \int \ln x \cdot \ln x\, dx = \int \ln x \cdot \mathrm{D}(x\ln x - x)dx =$

  $\ln x \cdot (x\ln x - x) - \int \frac{1}{x}(x\ln x - x)dx = x\ln^2 x - x\ln x - \int(\ln x - 1)dx =$

  $x\ln^2 x - x\ln x - (x\ln x - x - x) + c = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c,$

  quindi:

  $$\int_1^e \ln^2 x\, dx = [x\ln^2 x - 2\ln x + 2x]_1^e = e - 2.$$

Sostituiamo i valori trovati nell'espressione del volume:

$$V = \pi\frac{e}{2}(e^2 - 1) - \pi e^2(e - 2) = -\frac{1}{2}\pi e^3 + 2\pi e^2 - \frac{1}{2}\pi e \simeq 10{,}61.$$

QUESTIONARIO

1 Rappresentiamo in figura la regione R sottesa al grafico di $y = 4\sin x$ nell'intervallo $[0; \pi]$ (la funzione $y = 4\sin x$ è ottenuta da $y = \sin x$ mediante dilatazione verticale di fattore 4) e un generico rettangolo $CDEF$ inscritto in R, con la base CF giacente sull'asse x.

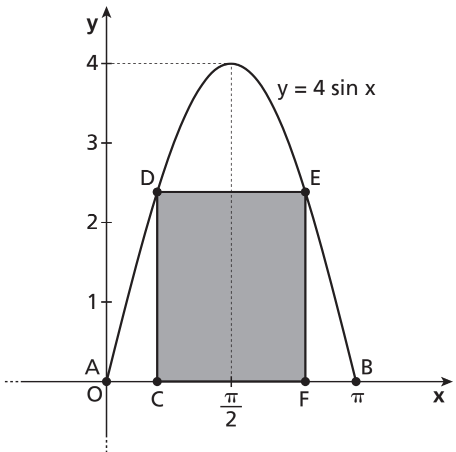


Figura 7

Indicato con $C(x; 0)$ le generiche coordinate di C, le coordinate degli altri vertici del rettangolo sono:

$$D(x; 4\sin x), \quad E(\pi - x; 4\sin x), \quad F(\pi - x; 0).$$

Il perimetro del rettangolo $CDEF$, in funzione dell'ascissa x di C, è dato da:

$$2p = 2\overline{CF} + 2\overline{CD} = 2(x_F - x_C) + 2(y_D - y_C) = 2(\pi - 2x) + 2(4\sin x) = 2(\pi - 2x + 4\sin x).$$

Individuiamo per quale valore di x il perimetro è massimo, cercando il punto di massimo della funzione $y = \pi - 2x + 4\sin x$:

$$y' = -2 + 4\cos x;$$

$$y' = 0 \to -2 + 4\cos x = 0 \to \cos x = \frac{1}{2} \to x = \frac{\pi}{3},$$

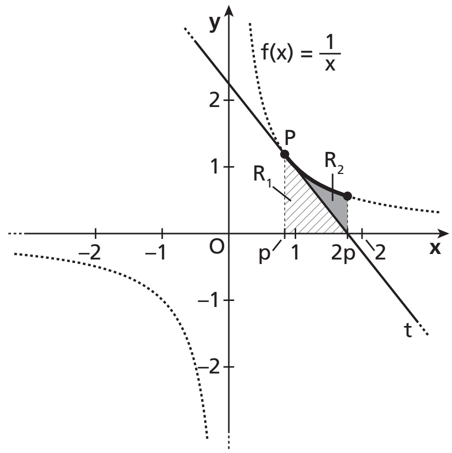
considerata la limitazione $0 \leq x \leq \pi$.
Risulta inoltre:

- $y' > 0$, e quindi y crescente, per $0 < x < \frac{\pi}{3}$;
- $y' < 0$, e quindi y crescente, per $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

Quindi $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo per la funzione y, di conseguenza il rettangolo $CDEF$ ha perimetro massimo quando C ha coordinate $C\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ e in questo caso il perimetro vale:

$$2p = 2\left(\pi - 2\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3} \simeq 9{,}02.$$

2 Disegniamo il grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$ e dispari. Mettiamo in evidenza l'intervallo $[p; 2p]$ con p generico diverso da zero, e disegniamo la retta t tangente a Γ nel punto di ascissa p.



■ **Figura 8**

Nel disegno abbiamo preso $p > 0$, ma, essendo *f* dispari, la trattazione algebrica seguente è valida anche per p negativo.

Per determinare l'equazione di *t* osserviamo che la retta passa per il punto $P\left(p; \frac{1}{p}\right)$ di Γ e, poiché è tangente a Γ in *P*, ha coefficiente angolare $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$; quindi l'equazione di *t* è:

$$y = f'(p)(x-p) + f(p) \rightarrow y = -\frac{1}{p^2}(x-p) + \frac{1}{p} \rightarrow y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}.$$

Calcoliamo l'intersezione di *t* con l'asse *x*:

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} \quad \rightarrow \quad x = 2p.$$

Quindi la retta tangente passa sempre per il punto $(2p; 0)$.

Per ogni valore di p non nullo, dunque, la retta *t* divide la regione sottesa a Γ nell'intervallo $[p; 2p]$ in due regioni:

- R_1, delimitata dall'asse *x*, dalla retta $x = p$ e dalla retta *t*;
- R_2, delimitata da Γ, dalla retta $x = 2p$ e dalla retta *t*.

La regione R_1 è un triangolo di area:

$$\text{area}(R_1) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

L'area della regione R_2 si ottiene sottraendo l'area della regione R_1 all'area sottesa da $f(x)$ nell'intervallo $[p; 2p]$.

$$\text{area}(R_2) = \int_p^{2p} \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2} = \left[\ln|x|\right]_p^{2p} - \frac{1}{2} = \ln|2p| - \ln|p| - \frac{1}{2} = \ln\frac{|2p|}{|p|} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 0,19.$$

Osserviamo che entrambe le aree sono indipendenti dal valore di $p \neq 0$.

3 Procediamo nel seguente modo:

a. determiniamo la retta *r* perpendicolare al piano α di equazione $x - y + z = 10$ e passante per $C(1; -1; 2)$;

b. il punto di intersezione *T* fra *r* e α individua il punto di contatto tra superficie sferica e piano;

c. la distanza $\overline{CT}$, ovvero la distanza di *C* dal piano α, fornisce il raggio della superficie sferica;

d. dato il centro e il raggio, determiniamo l'equazione della superficie sferica.

Sviluppiamo i singoli punti.

a. Le rette perpendicolari ad α hanno vettore di direzione $(1; -1; 1)$, le cui componenti sono i coefficienti di x, y, z dell'equazione di α. La retta r, in forma parametrica, è allora:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b. Sostituiamo le equazioni di r nell'equazione di α; la soluzione, in t, fornirà la coordinata parametrica del punto di intersezione T:

$$(1 + t) - (-1 - t) + (2 + t) = 10 \rightarrow 3t = 6 \rightarrow t = 2.$$

Il punto T ha dunque coordinate:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 - 2 \\ z = 2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow T(3; -3; 4).$$

c. Calcoliamo il raggio della sfera in due modi.

Modo 1. Distanza fra due punti.

$$r = \overline{CT} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Modo 2. Distanza punto-piano.

$$r = \text{distanza}(C, \alpha) = \frac{|1 - (-1) + 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

d. La superficie sferica di centro $C(1; -1; 2)$ e raggio $2\sqrt{3}$ ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (2\sqrt{3})^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 6 = 0.$$

4 Verifichiamo la validità della formula; ragioniamo prima sugli integrali definiti e poi passiamo agli integrali definiti. Risolviamo l'integrale definito per parti:

$$\int \cos^n x\, dx = \int \underbrace{\cos x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos^{n-1} x}_{f}\, dx = \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{\cos^{n-1} x}_{f} - \int \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{(n-1)(-\sin x)\cos^{n-2} x}_{f'}\, dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\, dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x\, dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx.$$

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\int \cos^n x\, dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx.$$

Portando a primo membro l'integrale di $\cos^n x$ ricaviamo:

$$n\int \cos^n x\, dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx \rightarrow$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Passando agli integrali definiti, possiamo allora scrivere:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \left[\frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx \rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx,$$

verificando così la formula.

Usiamo questo risultato per calcolare l'integrale definito richiesto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{4-1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{2-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\, dx = \frac{3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{3}{8} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi.$$

Osserviamo che abbiamo effettuato la sostituzione $\cos^0 x = 1$. Tale uguaglianza è vera per $\cos x \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2}$ (altrimenti avremmo 0^0 che non è definito), ma poiché tale punto $x = \frac{\pi}{2}$ rappresenta un punto di discontinuità eliminabile per la funzione costante $y = 1$, abbiamo potuto effettuare la sostituzione senza alterare il valore dell'integrale.

5 Il dado a sei facce è regolare, quindi la probabilità che in un lancio esca il numero 3 è $\frac{1}{6}$, mentre la probabilità che non esca il numero 3 è $\frac{5}{6}$.

Su n lanci, la probabilità che *non* esca mai il numero 3 è data da:

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Imponiamo che tale probabilità sia minore dello 0,01%:

$$p_n < 0{,}01\% \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{0{,}01}{100} \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-4} \rightarrow \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln 10^{-4} \rightarrow$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < -4 \cdot \ln 10 \rightarrow n > \frac{-4 \cdot \ln 10}{\ln 5 - \ln 6} \quad \text{perché } \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0.$$

Considerato che $\frac{-4 \cdot \ln 10}{\ln 5 - \ln 6} \simeq 50{,}5$, dovremo prendere $n \geq 51$.

6 Consideriamo la funzione $f(x) = x\left|ax^2 + b\right| - 3$ con a, b reali.
Il suo grafico Γ è tangente nel punto T di ascissa 1 alla retta di equazione $y = 7x - 9$; poiché T appartiene alla retta, la sua ordinata è $y = 7 \cdot 1 - 9 = -2$ e concludiamo che le coordinate del punto di tangenza sono $T(1; -2)$.

Il punto T appartiene anche al grafico di $f(x)$, quindi:

$$f(1) = -2 \rightarrow 1 \cdot \left|a \cdot 1^2 + b\right| - 3 = -2 \rightarrow \left|a + b\right| = 1.$$

La retta tangente in T a Γ ha coefficiente angolare 7, quindi deve essere $f'(1) = 7$.
Per poter derivare $f(x)$, che contiene un valore assoluto, ricordiamo la seguente regola:

$$\mathrm{D}\left[\left|g(x)\right|\right] = \frac{\left|g(x)\right|}{g(x)} \cdot g'(x).$$

In particolare otteniamo:

$$\mathrm{D}\left[\left|ax^2 + b\right|\right] = \frac{\left|ax^2 + b\right|}{ax^2 + b} \cdot 2ax.$$

Ritornando alla derivata di $f(x)$, troviamo:

$$f'(x) = \left|ax^2 + b\right| + x \cdot \frac{\left|ax^2 + b\right|}{ax^2 + b} \cdot 2ax = \left|ax^2 + b\right|\left(1 + \frac{2ax^2}{ax^2 + b}\right).$$

Imponiamo che la derivata assuma valore 7 in $x = 1$:

$$f'(1) = 7 \rightarrow |a+b|\left(1+\frac{2a}{a+b}\right) = 7 \rightarrow 1+\frac{2a}{a+b} = 7 \rightarrow \frac{3a+b}{a+b} = 7 \rightarrow$$

$$3a + b = 7a + 7b \rightarrow 4a + 6b = 0.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate, esaminando i due casi relativi al segno di $a + b$.

- Se $a + b \geq 0$ abbiamo:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+6b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 4-4b+6b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 2b=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases},$$

da cui:

$$f(x) = x\left|3x^2-2\right| - 3.$$

- Se $a + b < 0$ abbiamo:

$$\begin{cases} -a-b=1 \\ 4a+6b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ -4-4b+6b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ 2b=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases},$$

da cui:

$$f(x) = x\left|-3x^2+2\right| - 3.$$

Poiché i termini in valore assoluto $\left|3x^2-2\right|$ e $\left|-3x^2+2\right|$ rappresentano la stessa funzione, le due scritture trovate per $f(x)$ sono equivalenti.

7 I grafici γ_1 e γ_2 sono costituiti entrambi da una parabola:

- γ_1, grafico di $y = x^2 + 1$, una parabola rivolta verso l'alto di vertice

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 0,\ y_V = 1.$$

- γ_2, grafico di $y = x^2 - 8x + 9$, è una parabola rivolta verso l'alto di vertice

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4,\ y_V = -7.$$

Per determinare l'equazione della retta tangente a entrambe le parabole, prendiamo una generica retta tangente a γ_1 e imponiamo che risulti tangente anche a γ_2.

Preso dunque un punto $P(a; a^2 + 1)$ sulla prima parabola, con a reale, la retta tangente a γ_1 in P ha equazione:

$$y - (a^2+1) = 2a(x-a) \rightarrow y = 2ax - a^2 + 1,$$

dove il coefficiente angolare $2a$ è stato ottenuto sostituendo $x = a$ nella derivata di $y = x^2 + 1$.
Cerchiamo il punto di γ_2 nel quale la retta tangente ha coefficiente angolare $2a$:

$$y' = 2x - 8 \rightarrow 2x - 8 = 2a \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 4 + a \text{ da cui } y = (4+a)^2 - 8(4+a) + 9 = a^2 - 7.$$

Imponiamo che la retta tangente a γ_1 passi per tale punto $(4 + a; a^2 - 7)$:

$$a^2 - 7 = 2a \cdot (4+a) - a^2 + 1 \rightarrow a = -1.$$

In conclusione, la retta tangente a entrambe le parabole ha equazione:

$$y = 2(-1)x - (-1)^2 + 1 \rightarrow y = -2x$$

ed risulta tangente a γ_1 in $A(-1; 2)$ e a γ_2 in $B(3; -6)$.

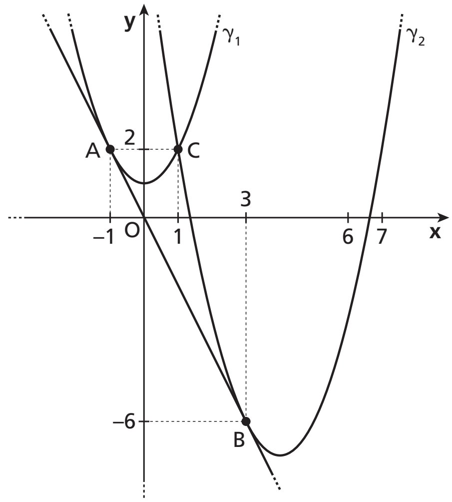


Figura 9

Le due parabole γ_1 e γ_2 si intersecano in:

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ y = x^2-8x+9 \end{cases} \to \begin{cases} y = x^2+1 \\ x^2+1 = x^2-8x+9 \end{cases} \to \begin{cases} y = x^2+1 \\ 8x = 8 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \to C(1; 2).$$

Calcoliamo l'area della regione limitata da γ_1, γ_2 e dalla retta tangente:

$$\text{area} = \int_{-1}^{1}[x^2+1-(-2x)]dx + \int_{1}^{3}[x^2-8x+9-(-2x)]dx =$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{1}^{3} =$$

$$\left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(\frac{-1}{3}+1-1\right)+\left(\frac{27}{3}-3\cdot 9+9\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right) =$$

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+9-\frac{19}{3} = -\frac{11}{3}+9 = \frac{-11+27}{3} = \frac{16}{3}.$$

8 La funzione assegnata

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{12} & \text{se } 1 < x \le 10 \end{cases}$$

è effettivamente una funzione densità di probabilità, poiché è ovunque $f(x) \ge 0$ (la funzione si considera nulla al di fuori dell'intervallo [0; 10]) e l'integrale definito su [0; 10] vale 1, infatti:

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx + \int_1^{10}\frac{1}{12}dx = \left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{12}x\right]_1^{10} = \frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{10}{12}-\frac{1}{12} = 1.$$

Il valore medio della variabile casuale corrispondente è:

$$\int_0^{10} x\cdot f(x)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^3\right)dx + \int_1^{10}\frac{1}{12}x\,dx = \left[\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{16}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{24}x^2\right]_1^{10} =$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{100}{24}-\frac{1}{24} = \frac{203}{48} \simeq 4{,}23.$$

Il valore mediano della variabile casuale è quel valore m, con $0 < m < 10$, tale che la probabilità dell'evento

$0 < X < m$ è uguale alla probabilità dell'evento $m < X < 10$; detto altrimenti, il valore mediano m è tale per cui:

$$p(0 < X < m) = p(m < X < 10) = \frac{1}{2}.$$

Noto che $p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, deve essere: $\int_0^m f(x)dx = \int_m^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Poiché $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, deve essere $1 < m < 10$.

Considerato $1 < m < 10$, abbiamo:

$$p(m < X < 10) = \int_m^{10} f(x)dx = \int_m^{10} \frac{1}{12}dx = \left[\frac{1}{12}x\right]_m^{10} = \frac{10}{12} - \frac{m}{12}.$$

Imponiamo tale probabilità uguale a $\frac{1}{2}$:

$$\frac{10}{12} - \frac{m}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow 10 - m = 6 \rightarrow m = 4.$$

Il valore mediano della variabile casuale è 4.

9 I punti dello spazio tridimensionale equidistanti da $A(0;1;2)$ e $B(-3;2;0)$ sono i punti del piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio.
Il segmento AB ha vettore di direzione:

$$\vec{v}(x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A) \rightarrow \vec{v}(-3;1;-2).$$

Il punto medio di AB è:

$$M\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2}\right) \rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1\right).$$

Il piano perpendicolare ad AB e passante per M ha equazione:

$$-3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + 1 \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2 \cdot (z - 1) = 0 \rightarrow -3x + y - 2z - 4 = 0.$$

10 Deriviamo due volte la funzione assegnata:

$$y = e^{-x}\sin x;$$

$$y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x);$$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale e verifichiamo che otteniamo un'identità, ovvero un'uguaglianza sempre verificata per ogni valore di x:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \rightarrow -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0 \rightarrow$$

$$2e^{-x}(-\cos x + \cos x - \sin x + \sin x) = 0 \rightarrow 0 = 0.$$

Quindi $y = e^{-x}\sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale assegnata.