

Svolgimento del problema 1

1 **Parte a**

La prima equazione, $y = a(x + 2)^2$, rappresenta una parabola di vertice $(-2; 0)$. Possiamo determinare il valore del parametro a imponendo il passaggio per il punto $(0; 1)$:

$$1 = a(0 + 2)^2 \rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

L'equazione dell'arco Γ_1 è quindi $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$.

La seconda equazione rappresenta una circonferenza di centro $(0; 0)$ e raggio $r = \sqrt{-b}$, con $b < 0$.

Determiniamo b imponendo che sia $r = 1$:

$$\sqrt{-b} = 1 \rightarrow b = -1.$$

Per determinare l'equazione dell'arco Γ_2 esplicitiamo y sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1$:
 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

La terza equazione, $x^2 - y^2 + c = 0$, per $c \neq 0$ rappresenta un'iperbole equilatera, centrata, con i fuochi sull'asse x se $c < 0$ e sull'asse y se $c > 0$, e con i vertici in $(\pm\sqrt{-c}; 0)$ se $c < 0$ e $(0; \pm\sqrt{c})$ se $c > 0$.

Poiché Γ_3 è un arco di iperbole con un vertice in $(1; 0)$, deve essere $\sqrt{-c} = 1 \rightarrow c = -1$.

Esplicitando rispetto a y , sotto le condizioni $y \geq 0 \wedge 1 \leq x \leq 2$, l'equazione si scrive $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

L'espressione analitica di f risulta infine

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 2)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

La funzione definita a tratti $f(x)$ è definita e continua in $[-2; 2]$. Calcoliamo la sua derivata $f'(x)$ osservando subito che $f(x)$ è derivabile nei punti interni di ciascun tratto.

Per $-2 < x < 0$, $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2(x + 2) = \frac{1}{2}(x + 2)$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $] - 2; 0[$.

Per $0 < x < 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]0; 1[$.

Per $1 < x < 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, che è definita nell'intervallo, per cui f è derivabile in $]1; 2[$.

Per quanto riguarda la derivabilità nei punti estremi dell'intervallo $[-2; 2]$, osserviamo inoltre che esiste la derivata destra in $x = -2$, che vale $f'_+(-2) = \frac{1}{2}(-2 + 2) = 0$, ed esiste la derivata sinistra in $x = 2$, che vale $f'_-(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Analizziamo ora la derivabilità in $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}(x + 2) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

La funzione non è derivabile in $x = 0$, perché la derivata sinistra e destra sono finite, ma diverse. Si tratta quindi di un punto angoloso. Nel punto $(0; 1)$ la funzione non ammette quindi una tangente, ma possiamo scrivere le equazioni della tangente sinistra e destra:

$$\text{Tangente sinistra: } m = f'_-(0) = 1 \rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \rightarrow y = x + 1$$

$$\text{Tangente destra: } m = f'_+(0) = 0 \rightarrow y - 1 = 0 \rightarrow y = 1.$$

Calcoliamo le derivate sinistra e destra in $x = 1$:

0 (al posto di "1!")

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

La funzione $y = f(x)$ non è quindi derivabile in $x = 1$, dove il grafico ha una cuspide con tangente verticale di equazione $x = 1$.

La funzione $f(x)$ è quindi derivabile in $[-2; 2] - \{0; 1\}$, con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2) & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Restano da calcolare le tangenti nei due punti di ascissa -2 e 2 . Si ha $f(-2) = 0$ e $f(2) = \sqrt{3}$.

Dall'equazione della derivata si ha $f'(-2) = 0$, e quindi la tangente in $(-2; 0)$ ha equazione $y = 0$.

$$\text{Analogamente, abbiamo } f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

La tangente in $(2; \sqrt{3})$ ha equazione

$$y - \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Parte b

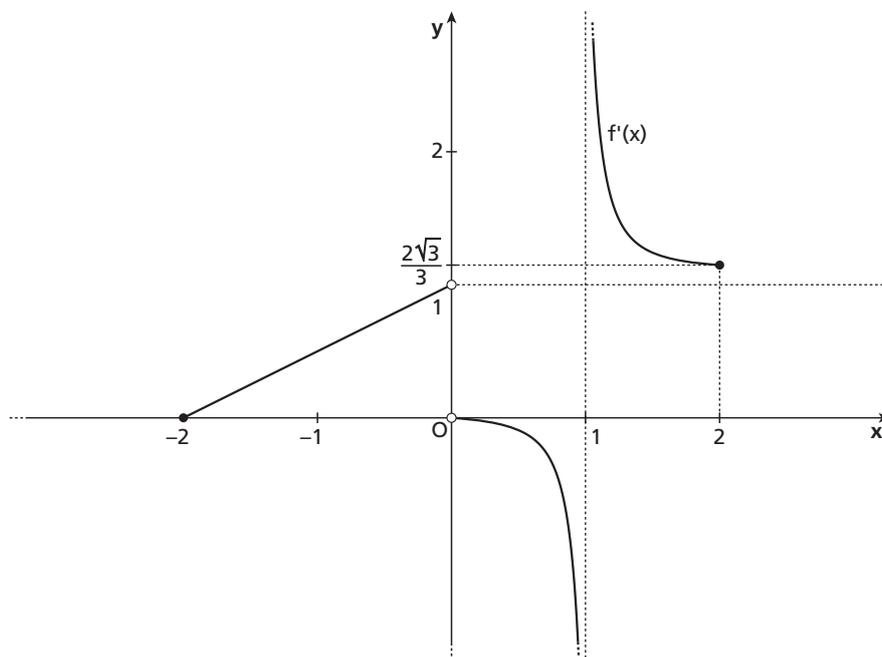
Dallo studio di funzione che abbiamo svolto nella Parte a, il dominio di $f'(x)$ risulta $[-2; 2] - \{0; 1\}$. Abbiamo inoltre ricavato le seguenti proprietà:

$$f'(-2) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty; \quad f'(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15.$$

- Nel tratto $-2 < x < 0$, $y = f(x)$ è monotona crescente e convessa, quindi $f'(x)$ è positiva e crescente.
In particolare, $y = f'(x)$ è un segmento di retta perché derivata di un polinomio di secondo grado.
- Nel tratto $0 < x < 1$, $y = f(x)$ è monotona decrescente e concava, quindi $f'(x)$ è negativa e decrescente.
- Nel tratto $1 < x \leq 2$, $y = f(x)$ è monotona crescente e concava, quindi $y = f'(x)$ è positiva e decrescente.

Il grafico di $f'(x)$ risulta:



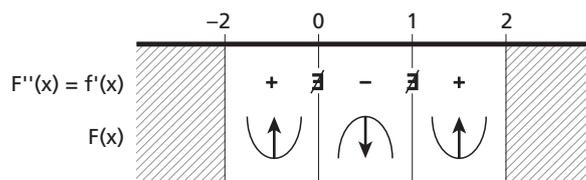
Analizziamo la concavità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

Poiché $f(x)$ è continua su $[-2; 2]$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$ in $[-2; 2]$.

Poiché $f(x)$ è derivabile in $[-2; 2] - \{0; 1\}$, vale anche $F''(x) = f'(x)$ in $[-2; 2] - \{0; 1\}$.

Dal grafico ottenuto nella Parte b, possiamo analizzare il segno di $F''(x)$:

$F(x)$ è convessa per $-2 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 2$; è concava per $0 < x < 1$.



Poiché $F(x)$ è continua in $x = 0$ e $x = 1$ e la funzione cambia concavità, questi sono punti di flesso.

Parte c

Dal grafico della funzione $f(x)$ si osserva che

$$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2, \quad g : [-2; 0] \rightarrow [0; 1]$$

è iniettiva (in quanto monotona crescente) e suriettiva, e quindi invertibile.

Ricaviamo l'espressione analitica dell'inversa esplicitando x :

$$\begin{aligned} 4y &= (x+2)^2 \rightarrow x+2 = \pm\sqrt{4y} \text{ (poiché } y \geq 0) \\ x &= -2 \pm \sqrt{4y} \rightarrow x = -2 + \sqrt{4y} \text{ (poiché } -2 \leq x \leq 0) \end{aligned}$$

Esprimendo la variabile indipendente con x :

$$h(x) = -2 + 2\sqrt{x}, \quad h[0; 1] \rightarrow [-2; 0]$$

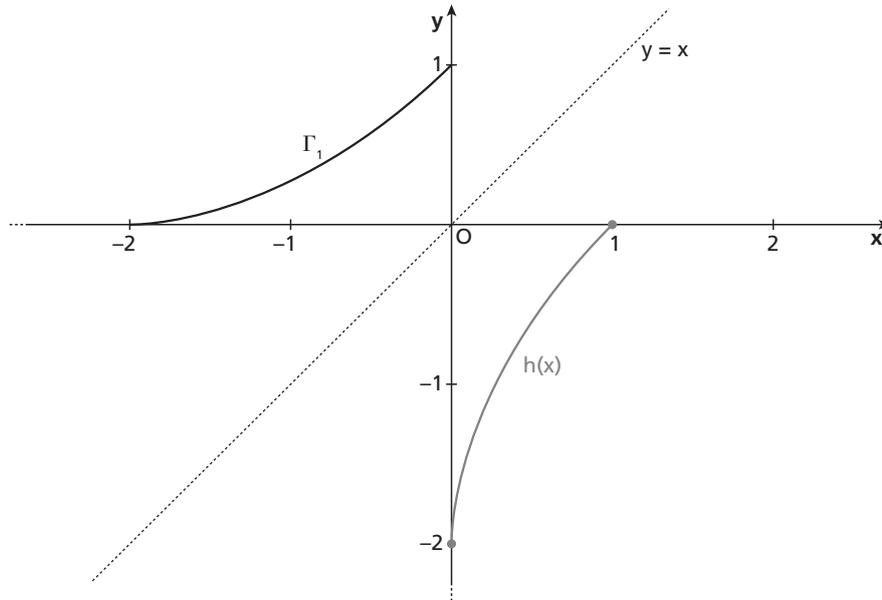
La funzione $y = h(x)$ è derivabile in $]0; 1]$ in quanto $y = g(x)$ è derivabile in $] - 2; 0]$ con $y'(x) \neq 0$.

Per il teorema della derivata della funzione inversa,

$$h'_+(0) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{g'(x)} = +\infty,$$

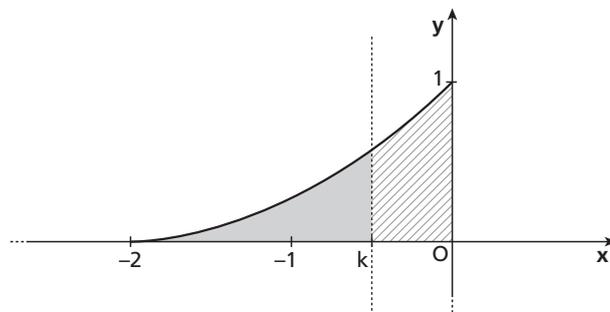
quindi h non è derivabile in 0.

Il grafico di $h(x)$, in quanto funzione inversa di $g(x)$, è il simmetrico di Γ_1 rispetto alla bisettrice degli assi cartesiani:

**Parte d**

Poiché la funzione è positiva su tutto l'intervallo, possiamo calcolare l'area con l'integrale. Calcoliamo l'area di S :

$$A_S = \int_{-2}^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(x+2)^3}{3} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{2}{3}.$$



Cerchiamo il valore di k per cui

$$\begin{aligned} \int_{-2}^k \frac{1}{4}(x+2)^2 dx &= \int_k^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{3} \\ \int_{-2}^k \frac{1}{4}(x+2)^2 dx &= \frac{1}{4} \left[\frac{(x+2)^3}{3} \right]_{-2}^k = \frac{1}{4} \frac{(k+2)^3}{3} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{4} \frac{(k+2)^3}{3} &= \frac{1}{3} \rightarrow (k+2)^3 = 4 \rightarrow k = -2 + \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$