

Soluzioni dell'esempio della seconda prova di matematica e fisica pubblicato dal MIUR il 20 dicembre 2018

A cura di Gianni Melegari, Enrico Turchetti e Paolo Carboni
© Zanichelli 2019

Problema 1

1) Nella figura 1a è rappresentata la fase in cui la spira penetra all'interno della regione sede del campo magnetico. Le linee di campo \vec{B} , iniziano ad attraversare il rettangolo delimitato dalla spira (S) producendo su di esso una variazione del flusso ($\Delta\Phi_S(\vec{B})$), variazione che continuerà a crescere fino a quando il rettangolo non sarà completamente attraversato dalle linee del campo magnetico, cioè fino a quando la spira non sarà completamente immersa nella regione sede di \vec{B} .

Durante questa fase, per la legge di Faraday-Neumann la variazione del flusso di \vec{B} attraverso S genererà nella spira una corrente indotta che, per la legge di Lenz, percorrerà la spira in senso orario.

Sul lato CB della spira, per effetto della legge di Faraday, quindi, agirà una forza magnetica (\vec{F}_m) che, per la regola della mano destra, sarà rivolta in verso opposto al moto della spira, producendone un rallentamento.

Nella figura 1b è rappresentata la fase successiva in cui la spira fuoriesce della regione sede del campo magnetico.

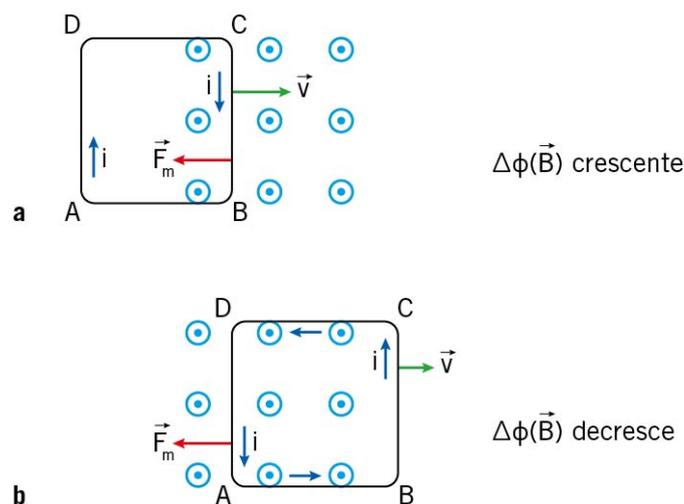


Figura 1

- a.** La spira penetra nella regione sede del campo magnetico: varia il flusso del campo magnetico, che aumenta fino a quando la spira non è completamente attraversata dalle linee di campo.
- b.** La spira comincia a fuoriuscire dalla regione sede del campo magnetico: il flusso del campo magnetico comincia a diminuire.

In tale fase il numero delle linee di campo \vec{B} che attraversa il rettangolo delimitato dalla spira diminuisce producendo, nuovamente, una variazione del flusso ($\Delta\Phi_S(\vec{B})$), ma in senso contrario, variazione che continuerà a diminuire fino a quando la spira non sarà completamente uscita dalla regione sede di \vec{B} .

In questa nuova fase la spira, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, sarà attraversata da una corrente indotta che la percorrerà in senso antiorario per cui sul lato AD agirà una forza magnetica rivolta, nuovamente, in senso opposto al moto. La spira pertanto verrà ulteriormente rallentata.

2) Nella situazione proposta dal testo, la legge di Faraday-Neumann-Lenz va utilizzata nella sua forma differenziale:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Dalla definizione di flusso e dall'ortogonalità delle linee di campo segue che:

$$d\Phi(B) = B \cdot dS$$

dove dS indica la variazione istantanea dell'area attraversata dalle linee di campo. dS rappresenta l'area di un rettangolo di lati L e ds . Pertanto:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = - \frac{(B \cdot L \cdot ds)}{dt} = -BL \cdot \frac{ds}{dt} = -BLv$$

dove v rappresenta la velocità istantanea della spira.

Utilizzando la prima legge di Ohm l'intensità della corrente indotta nella spira vale:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = - \frac{BLv}{R}$$

Per la legge di Faraday la componente lungo il binario della forza che agisce prima sul lato CD e poi sul lato AB della spira vale:

$$F_m = B \cdot i \cdot L = - \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Per la legge di Newton $F = m \cdot a$, sapendo che l'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 L^2}{R} v \quad c. v. d. \quad (1)$$

3) La (1) è un'equazione differenziale. Per verificare che $v = v_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ è una sua soluzione basta calcolare v' (la derivata prima di v rispetto a t) e sostituire.

Poiché

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\tau} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

sostituendo otteniamo:

$$-\frac{1}{\tau} m v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{B^2 L^2}{R} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Semplificando e ricavando τ si ottiene:

$$\tau = \frac{mR}{B^2 L^2} \quad (2)$$

Sostituendo nella (2) i valori numerici assegnati dal problema otteniamo:

$$\tau = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,020}{0,85^2 (5,0 \cdot 10^{-2})^2} \text{ s} = 0,55 \text{ s}$$

4) Poiché $v = \frac{ds}{dt}$ e $v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ allora:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

Per ricavare $s(t)$ dalla (3) dobbiamo integrare rispetto alla variabile t . Sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ si ha $s = 0$ possiamo scrivere:

$$s = \int_0^t v_0 e^{-\frac{x}{\tau}} dx = -v_0 \tau \int_0^t -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = -v_0 \tau \left[e^{-\frac{x}{\tau}} \right]_0^t = -v_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right)$$

dove abbiamo utilizzato x come variabile "muta" d'integrazione.

Sapendo che lo spazio totale percorso dalla spira vale $2L$, per determinare il tempo impiegato dalla spira, risolviamo l'equazione:

$$2L = -v_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{2L}{v_0 \tau} \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln \left(1 - \frac{2L}{v_0 \tau} \right) \Rightarrow t = -\tau \ln \left(1 - \frac{2L}{v_0 \tau} \right)$$

sostituendo i dati in nostro possesso:

$$t = (-0,55 \text{ s}) \cdot \ln \left(1 - \frac{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}}{0,20 \cdot 0,55} \right) = 1,32 \text{ s}$$

La velocità del vagone al superamento del magnete sarà quindi:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = (0,20 \text{ m/s}) \cdot e^{-\frac{1,32}{0,55}} = 0,018 \text{ m/s}$$

5) Affinché la spira non superi il magnete, matematicamente, occorre che sia verificata la seguente condizione:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \leq 2L$$

Poiché:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-v_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \right) = v_0 \tau$$

la condizione affinché il freno agisca come un blocco insormontabile per il vagone è:

$$v_0 \tau \leq 2L \Rightarrow v_0 \leq \frac{2L}{\tau}$$

Sostituendo i dati numerici:

$$v_0 \leq \frac{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}}{0,55} \text{ m/s} \Rightarrow v_0 \leq 0,18 \text{ m/s}$$

Problema 2

Fase di ascesa

1) Per disegnare il diagramma delle forze dobbiamo considerare che ad agire, se si trascura la forza di attrito, sono solo la spinta di Archimede (\vec{S}_A) rivolta verso l'alto e la forza peso complessiva \vec{P} che è quella che agisce sulla massa totale del sistema, costituita dalla massa di Baumgartner, dalla sua tuta, dalla massa del pallone e dell'elio. Poiché nel testo si dice che la spinta è doppia della forza necessaria a tenere in equilibrio il sistema, il vettore \vec{S}_A avrà modulo doppio del vettore \vec{P} e mentre il primo è rivolto verso l'alto, il secondo è rivolto verso il basso (figura 1).



Figura 1. Diagramma delle forze subito dopo il decollo.

2) La forza di attrito con l'aria agisce in verso opposto al moto, pertanto alle forze tracciate in figura 1 occorre aggiungerne un'altra, rivolta verso il basso (indicata nella figura 2 con \vec{f}).



Figura 2. Al diagramma delle forze va aggiunta la forza di attrito \vec{f} , che si oppone al moto di ascesa ed è quindi rivolta verso il basso.

Se il moto di ascesa diventa rettilineo uniforme, la risultante delle tre forze deve essere nulla e ciò può avvenire solo se:

$$\vec{S}_A = \vec{P} + \vec{f}$$

Da cui, passando ai moduli avremo:

$$f = S_A - P$$

Ma sappiamo dal testo che $S_A = 2P$.

Perciò otteniamo:

$$f = 2P - P = P$$

Da cui:

$$f = m_{tot} \cdot g = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Fase di lancio

3) Preso un sistema di riferimento centrato sulla posizione di Baumgartner e con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso, dal grafico che mostra l'andamento della velocità in funzione del tempo si deduce che per $t < 20$ s la velocità del sistema S (costituito da Baumgartner e la sua tuta) cresce linearmente con il tempo: il moto è uniformemente accelerato.

Per determinare l'accelerazione calcoliamo la pendenza del tratto rettilineo del grafico velocità tempo. Nei primi 10 secondi la velocità passa da zero a poco meno di 100 m/s e nei successivi dieci secondi raggiunge una velocità di poco meno di 200 m/s.

Ne possiamo dedurre che l'accelerazione media vale circa:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{100}{10} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

Se ne può concludere che il moto del sistema S nei primi 20 secondi è approssimativamente il moto di un corpo che cade liberamente, sottoposto alla sola azione della accelerazione di gravità.

La difficoltà nella lettura del grafico impedisce una precisione maggiore; la previsione teorica consente di calcolare l'accelerazione di gravità alla quota di circa 39045 m: essa risulta essere data da:

$$\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = 9,69 \text{ m/s}^2$$

Utilizzando un software di geometria dinamica è possibile risalire alle coordinate dei punti con una precisione maggiore e, tracciando la retta passante per i primi due punti del grafico, determinare il valore dell'accelerazione, dato dal coefficiente angolare della retta stessa (figura 3). Così facendo si nota che il valore di a ($9,64 \text{ m/s}^2$) è prossimo a quello previsto teoricamente e ottenuto nella (1).

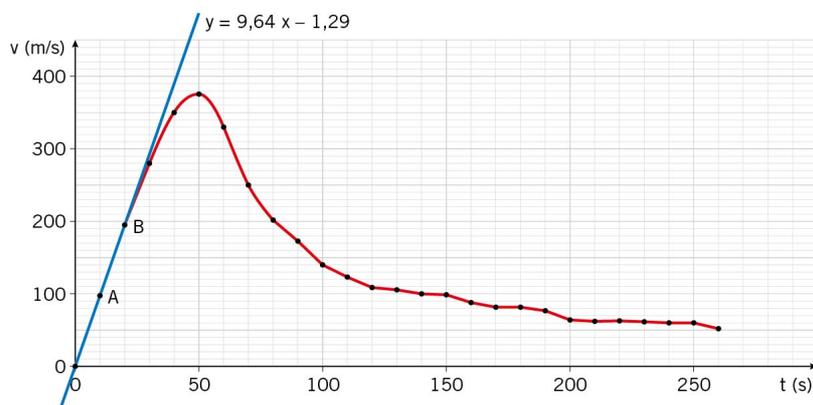


Figura 3. Interpolando i dati si attiene un valore per l'accelerazione molto simile a quello previsto teoricamente.

4) Dalla lettura del grafico velocità tempo si deduce che c'è un intervallo di tempo nel quale la velocità supera i 300 m/s. Tale intervallo, approssimativamente, è compreso tra i 35 e i 65 secondi del tempo di caduta.

In particolare il limite inferiore è un po' sopra i 35 secondi. Infatti leggendo con attenzione il grafico si intuisce che dopo 35 secondi il sistema ha raggiunto una velocità pari a 300 m/s, d'altra parte dopo quell'intervallo di tempo il sistema si trova a una altezza di 34 km quota alla quale la velocità del suono è leggermente superiore ai 300 m/s.

Il limite superiore va leggermente abbassato in quanto dopo 65 secondi il sistema ha una velocità di circa 290 m/s.

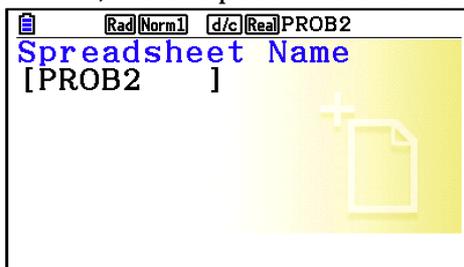
Dopo 65 secondi il sistema si trova a una altezza di circa 23 km, quota alla quale la velocità del suono è leggermente inferiore a 300 m/s.

In conclusione il sistema raggiunge e supera la velocità del suono in un intervallo di tempo che va da poco dopo i 35 secondi dall'inizio della fase di lancio fino a poco prima dei 65 secondi.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Possiamo utilizzare la calcolatrice grafica per verificare più approfonditamente le conclusioni a cui siamo giunti. La calcolatrice qui utilizzata è la Casio Fx-Cg50.

Per prima cosa apriamo l'ambiente "Spreadsheet" della calcolatrice e creiamo un nuovo file mediante la pressione dei tasti F1-F1, file che possiamo chiamare "PROB2":



Premendo EXE avremo a disposizione un nuovo foglio elettronico.

Utilizziamo le prime quattro colonne del foglio per inserire i dati relativi, rispettivamente, al tempo, alla quota, alla velocità di Baumgartner e alla velocità del suono.

Tali dati sono reperibili nei due grafici forniti dal testo e nella tabella sulla velocità del suono.

PRO	A	B	C	D
1		40		318
2	0	39	0	
3	10	38.5	98	
4	20	37	195	
5	30	34.5	280	

318

NEW OPEN SAVE-AS RECALCS CSV

PRO	A	B	C	D
6	35	33	315	
7	40	31.5	350	
8	45	30	370	301
9	50	27.5	375	
10	55	25.5	360	

CONTENT FORMAT ALL

PRO	A	B	C	D
11	60	24	330	
12	65	22.5	290	
13	70	21.5	250	
14	75	20	225	297
15				

NEW OPEN SAVE-AS RECALCS CSV

Nella colonna scelta per indicare i dati sulla velocità del suono sono presenti solo tre valori, quelli che riteniamo più significativi per rispondere alla domanda del quesito.

Supponendo che i dati relativi alla velocità del suono siano distribuiti linearmente nei due intervalli $[318 \text{ m/s}, 301 \text{ m/s}]$ e $[301 \text{ m/s}, 297 \text{ m/s}]$, calcoliamo le equazioni della retta passante per i punti $(40; 318)$ e $(30; 301)$ e della retta passante per $(30; 301)$ e $(20; 297)$.

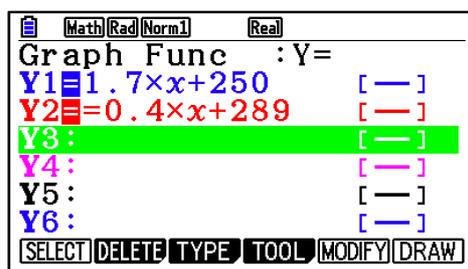
Le equazioni di tali rette sono:

$$y - 318 = \frac{301 - 318}{30 - 40}(x - 40) \Rightarrow y = 1.7x + 250$$

e:

$$y - 301 = \frac{297 - 301}{20 - 30}(x - 30) \Rightarrow y = 0.4x + 289$$

Introduciamo le due equazioni nell'ambiente "Graph":



Torniamo nell'ambiente "Spreadsheet" e nella cella D2 scriviamo "=", premiamo il tasto "VARS" seguito da F4 e da F1, così da ottenere Y, a cui facciamo seguire "1(B2)". Premendo "EXE" otteniamo il valore che avrebbe la velocità del suono a quota 39 Km, se variasse linearmente come previsto.

PRO	A	B	C	D
1		40		318
2	0	39	0	
3	10	38.5	98	
4	20	37	195	
5	30	34.5	280	

=Y1(B2)

PRO	A	B	C	D
1		40		318
2	0	39	0	316.3
3	10	38.5	98	
4	20	37	195	
5	30	34.5	280	

Dopo aver posizionato il cursore nella cella D2 e premuto "EXIT" premiamo, in sequenza, F2, F2 e spostiamoci nella cella D3 e premiamo F1.

PRO	A	B	C	D
1		40		318
2	0	39	0	316.3
3	10	38.5	98	315.45
4	20	37	195	
5	30	34.5	280	

=Y1(B3)

Ripetiamo il comando fino alla cella D7:

PRO	A	B	C	D
4	20	37	195	312.9
5	30	34.5	280	308.65
6	35	33	315	306.1
7	40	31.5	350	303.55
8	45	30	70	301

=Y1 (B7)

PASTE

Spostiamo nella cella D9 e ripetiamo la sequenza descritta modificando Y1 con Y2:

PRO	A	B	C	D
5	30	34.5	280	308.65
6	35	33	315	306.1
7	40	31.5	350	303.55
8	45	30	370	301
9	50	27.5	375	

=Y2 (B9)

Y r Xt Yt X

FILE EDIT DELETE INSERT CLEAR

PRO	A	B	C	D
6	35	33	315	306.1
7	40	31.5	350	303.55
8	45	30	370	301
9	50	27.5	375	300
10	55	25.5	360	

PRO	A	B	C	D
10	55	25.5	360	299.2
11	60	24	330	298.6
12	65	22.5	290	298
13	70	21.5	250	297.6
14	75	20	225	297

=Y2 (B13)

CUT COPY CELL JUMP SEQ

Scorrendo i dati possiamo facilmente verificare che la velocità di Baumgartner risulta superiore a quella del suono in un intervallo che va da 35 s fino a 60 s inclusi.

Possiamo, infine, effettuare un'ultima verifica grafica.

Premiamo EXIT e F6, e impostiamo come in figura "StatGraph1":

PRO	A	B	C	D
10	55	25.5	360	299.2
11	60	24	330	298.6
12	65	22.5	290	298
13	70	21.5	250	297.6
14	75	20	225	297

StatGraph1

Graph Type: xyLine

XCellRange: A2:A14

YCellRange: C2:C14

Frequency : 1

Mark Type :

Color Link: Off

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Premiamo F2 e impostiamo come in figura "StatGraph2":

PRO	A	B	C	D
10	55	25.5	360	299.2
11	60	24	330	298.6
12	65	22.5	290	298
13	70	21.5	250	297.6
14	75	20	225	297

StatGraph2

Graph Type: xyLine

XCellRange: A2:A14

YCellRange: D2:D14

Frequency : 1

Mark Type :

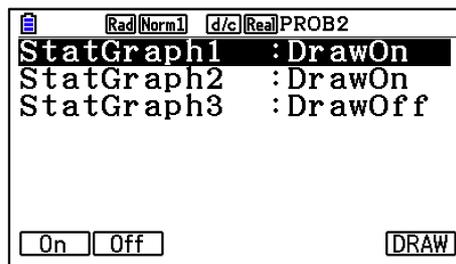
Color Link: Off

Grph Color: Red

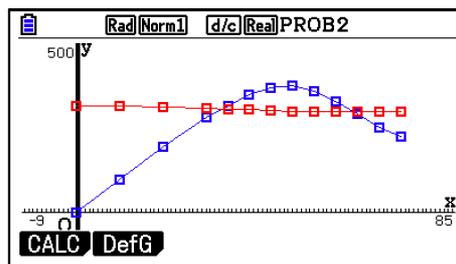
COLOR

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Premiamo EXIT e F4 ed impostiamo ad On sia StatGgraph1 che StatGraph2:



Infine, premiamo DRAW:



5) Quando Baumgartner si lancia l'energia meccanica iniziale del sistema (E_{m1}) è solo energia potenziale; se consideriamo l'accelerazione di gravità costante, indicata con m_B la massa di Baumgartner e la sua tuta, con h_1 l'altezza dalla quale comincia il lancio tale energia vale:

$$E_{m1} = U_1 = m_B \cdot g \cdot h_1 = 4,6 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Nella caduta, l'energia potenziale si trasforma. Quando Baumgartner raggiunge la massima velocità, cioè dopo 50 secondi dal lancio, possiede una energia meccanica data dalla somma dell'energia cinetica acquistata nella caduta e dall'energia potenziale alla quota raggiunta. Tale quota (h_2) si può evincere dal secondo grafico ed è circa di 28 chilometri.

Quindi, l'energia cinetica è data da:

$$K_{h_2} = \frac{1}{2} m v_{Max}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1341,9}{3,6} \right)^2 \cdot 120 \text{ J} = 8,3 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Mentre l'energia potenziale sarà:

$$U_{h_2} = m \cdot g \cdot h_2 = 120 \cdot 9,8 \cdot 28 \cdot 10^3 \text{ J} = 3,3 \cdot 10^7 \text{ J}$$

L'energia meccanica complessiva è quindi:

$$E_{m2} = K_{h_2} + U_{h_2} = 4,1 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Esiste quindi una variazione di energia meccanica ΔE_m data da:

$$\Delta E_m = E_{m1} - E_{m2} = 5,0 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Il fatto che l'energia meccanica non si sia conservata ci fa capire che una parte di essa si è trasformata in altra forma, evidentemente a causa della presenza di forze dissipative.

Nel moto di caduta, infatti, non può essere trascurata la forza d'attrito che compie lavoro trasformando una parte dell'energia meccanica in energia termica.

6) Nel primo diagramma la forza d'attrito (\vec{f}) è maggiore del peso (\vec{P}): la risultante è una forza rivolta verso l'alto che rallenta il sistema. Nel secondo diagramma è la forza peso a essere superiore a quella di attrito per cui il corpo accelera verso il basso. Nel terzo diagramma la forza peso e quella di attrito si equilibrano e l'accelerazione è quindi nulla. Sulla base di queste considerazioni e osservando il grafico delle velocità possiamo affermare che:

- Dopo un tempo $t_1 = 40$ s il corpo sta ancora accelerando ($P > f$), la tangente nel punto di ascissa t_1 ha pendenza positiva per cui il diagramma associato è il diagramma B.
- Al tempo $t_2 = 50$ s, la tangente al grafico velocità tempo è orizzontale, quindi l'accelerazione è nulla conseguenza del fatto che la risultante delle forze agenti vale zero ($f = P$), situazione che si realizza nel diagramma C.
- Al tempo $t_3 = 60$ s la tangente al grafico velocità tempo ha pendenza negativa, il corpo sta rallentando ($f > P$), il diagramma associato è il diagramma A.

7) Baumgartner ha aperto il paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi dal lancio, cioè dopo 260 secondi. Dal secondo grafico osserviamo che la quota di Baumgartner dopo 260 secondi è approssimativamente di 2,5 km rispetto al suolo.

Per calcolare la velocità media di discesa dopo l'apertura del paracadute e fino all'arrivo al suolo dividiamo lo spazio da percorrere (2,5 km) per l'intervallo di tempo (Δt) dall'apertura del paracadute fino a terra. Considerando che il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi, pari a 543 s avremo:

$$v_{media} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{(543 - 260)} \text{ m/s} = 8,8 \text{ m/s}$$

All'atto dell'apertura del paracadute la velocità di Baumgartner subisce una forte diminuzione perché la forza di attrito aumenta bruscamente fino a raggiungere la stessa intensità della forza peso. Da questo istante in poi le due forze sono uguali e opposte e quindi la loro risultante è uguale a zero.

Per il principio di inerzia il paracadutista scende allora a una velocità costante, detta velocità limite. Per questo è ragionevole considerare il moto in quest'ultima fase un moto rettilineo uniforme.

8) Se con il termine "stessa velocità" si intende il valore della velocità media trovata al punto precedente allora l'altezza richiesta si ricava dalla formula inversa che consente di calcolare la velocità di caduta di un grave da una altezza h :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Da cui:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(8,8)^2}{19,6} \text{ m} = 3,9 \text{ m}$$

Quesito 1

Per calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira dobbiamo utilizzare la legge di Faraday- Neumann-Lenz, in forma differenziale:

$$fem = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Per definizione di flusso, data l'ortogonalità di B rispetto al piano della parabola, $\Phi(B) = B \cdot S$, dove S rappresenta l'area della parte di spira attraversata dalle linee del campo magnetico.

Tale area non è altro che quella delimitata dalla parabola e dalla barretta.

Possiamo determinare l'area di tale regione con il calcolo integrale oppure, ricordando la regola che si utilizza per calcolare l'area di un segmento parabolico, basta moltiplicare per $\frac{2}{3}$ l'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico (figura 1).

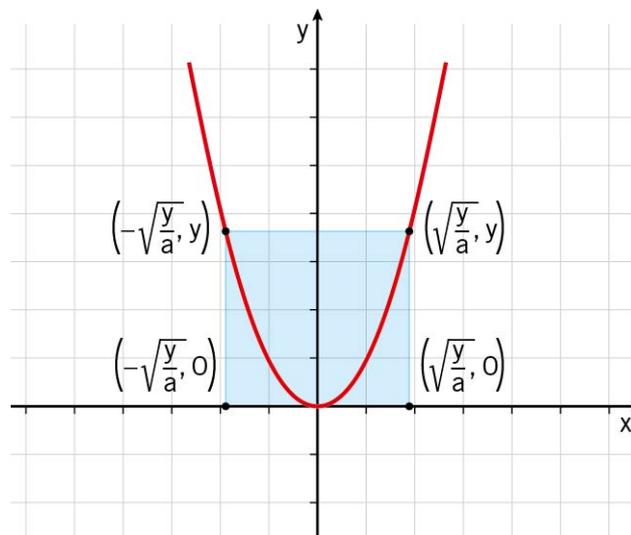


Figura 1. Il rettangolo circoscritto al segmento parabolico e le coordinate dei suoi vertici.

Poiché la barretta è, a un determinato istante, alla generica quota $y \geq 0$ rispetto all'asse x , i punti in cui la barretta interseca la parabola hanno coordinate $(-\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ e $(\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ e le loro proiezioni sull'asse x hanno coordinate $(-\sqrt{\frac{y}{a}}, 0)$ e $(\sqrt{\frac{y}{a}}, 0)$.

Pertanto l'area del segmento parabolico, e quindi S , è data da:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 2 \sqrt{\frac{y}{a}} \cdot y = \frac{4}{3} y \sqrt{\frac{y}{a}} \quad (1)$$

D'altra parte la barretta si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Nell'ipotesi che fosse sul vertice della parabola all'istante $t = 0$ s, al generico istante t avrà percorso una distanza pari a

$$y = \frac{1}{2} wt^2 \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) otteniamo:

$$S = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} w t^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \frac{w t^2}{a}} = \sqrt{\frac{2w^3}{9a}} t^3$$

Da cui:

$$fem = -B \frac{dS}{dt} = -B \cdot \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{2w^3}{9a}} t^3 \right) = -3B \sqrt{\frac{2w^3}{9a}} t^2 = -B \sqrt{\frac{2w^3}{a}} t^2 \quad (3)$$

Dalla (2) ricaviamo t^2 in funzione di y ottenendo $t^2 = \frac{2y}{w}$.

Sostituendo nella (3) otteniamo:

$$fem = -B \cdot \sqrt{\frac{2w^3}{a}} \cdot \frac{2y}{w} = -2By \sqrt{\frac{2w}{a}}$$

Quesito 2

a) La velocità della particella, in funzione del tempo, si trova derivando la funzione $x(t)$, mentre l'accelerazione si ottiene facendo la derivata seconda della funzione $x(t)$. Per cui avremo:

$$\begin{aligned}v(t) = x'(t) &= \alpha \cdot (1 - \beta t) + \alpha t \cdot (-\beta) = \alpha - \alpha\beta t - \alpha\beta t = \alpha - 2\alpha\beta t \\ a = x''(t) &= -2\alpha\beta\end{aligned}\quad (1)$$

Si tratta, quindi, di un moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione positiva se $\alpha < 0$ e negativa se $\alpha > 0$; la velocità iniziale è $v(0) = \alpha$.

La velocità si annulla dopo un tempo t che si ricava ponendo $v = 0$ nella (1), cioè:

$$\alpha - 2\alpha\beta t = 0$$

e quindi:

$$t = \frac{1}{2\beta}\quad (2)$$

Dopo tale intervallo di tempo la particella inverte il moto e ritorna verso l'origine.

b) Perché la particella torni nell'origine dobbiamo porre $x = 0$ nell'equazione che fornisce la posizione al tempo t . Così facendo otteniamo:

$$\alpha t \cdot (1 - \beta t) = 0$$

Da cui si ricava:

$$\alpha t = 0 \quad \text{cioè} \quad t = 0$$

Situazione che si ha alla partenza della particella, oppure:

$$1 - \beta t = 0 \quad \text{cioè} \quad t = \frac{1}{\beta}$$

Si tratta, come ci aspettavamo, di un tempo doppio di quello impiegato dalla particella per fermarsi.

La posizione finale della particella coinciderà con l'origine, mentre lo spazio percorso sarà il doppio di quello percorso nel primo tratto. Calcoliamo allora tale spazio:

$$x\left(\frac{1}{2\beta}\right) = \frac{\alpha}{2\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{2\beta}\right) = \frac{\alpha}{4\beta}$$

Lo spazio totale percorso dalla particella è quindi:

$$x_{totale} = 2 \cdot \frac{\alpha}{4\beta} = \frac{\alpha}{2\beta}$$

Quesito 3

a) Con riferimento alla figura 1a l'energia potenziale del sistema formato dalle tre cariche elettriche sarà la somma algebrica delle energie potenziali di tutte le possibili coppie di cariche:

$$U_{TOT} = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC}$$

Poiché le cariche sono tutte uguali, in valore e in segno, e le loro distanze reciproche ($l = 1 \text{ m}$) le stesse, l'energia potenziale totale sarà il triplo di quella che compete a una coppia di cariche (che indichiamo con U):

$$U_{TOT} = 3 \cdot U_{AB} = 3 \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{l} = 3 \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon l} \equiv 3U$$

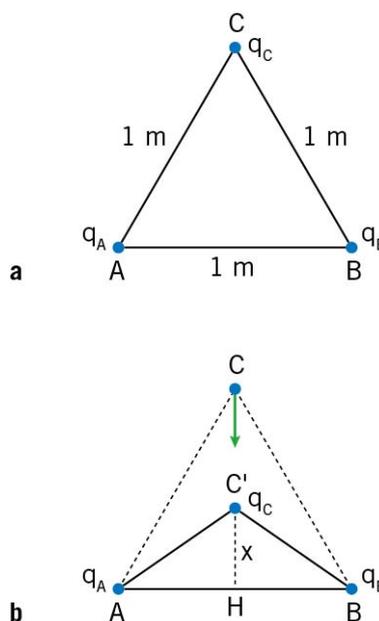


Figura 1.

a. Le tre cariche nella configurazione iniziale.

b. Quando la carica posta in C si sposta, l'energia potenziale del sistema varia.

b) La carica collocata in C si sposta ora lungo l'altezza relativa alla base AB assumendo la posizione C' (figura 1B). Indicata con x la distanza della carica q_C dalla base AB notiamo che i valori che l'incognita può assumere sono limitati all'intervallo:

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

Utilizziamo il teorema di Pitagora e ricaviamo la misura di AC' (sottintendendo l'unità di misura "metro").

$$\overline{AC'} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC'}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4x^2}$$

L'energia potenziale del sistema, al variare di x è data da $U_{AB} + U_{AC} + U_{BC}$

$$U(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} + 2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}} = U \cdot \left(1 + \frac{4}{\sqrt{1+4x^2}}\right)$$

Ci limitiamo a ricavare le caratteristiche principali della funzione $U(x)$ che ci consentano di tracciarne un grafico nell'intervallo $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Agli estremi dell'intervallo assume i valori $5U$ e $3U$ mantenendosi sempre positiva.

La sua derivata prima vale:

$$U'(x) = 4U \cdot \frac{d}{dx} [(1+4x^2)]^{-\frac{1}{2}} = -2U \cdot (1+4x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 8x = -\frac{16Ux}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}$$

Nell'intervallo $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ risulta di segno negativo per cui la funzione è decrescente.

La derivata seconda vale:

$$\begin{aligned} U''(x) &= -U \cdot \frac{d}{dx} [(1+4x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 16x] = 24Ux \cdot (1+4x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 8x - 16U \cdot (1+4x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 16U \cdot (1+4x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot [12x^2 - (1+4x^2)] = \frac{16U(8x^2 - 1)}{\sqrt{(1+4x^2)^5}} \end{aligned}$$

e risulta positiva in $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e negativa in $\left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ per cui presenta un punto di flesso in

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

L'andamento della funzione è mostrato nella figura 2.

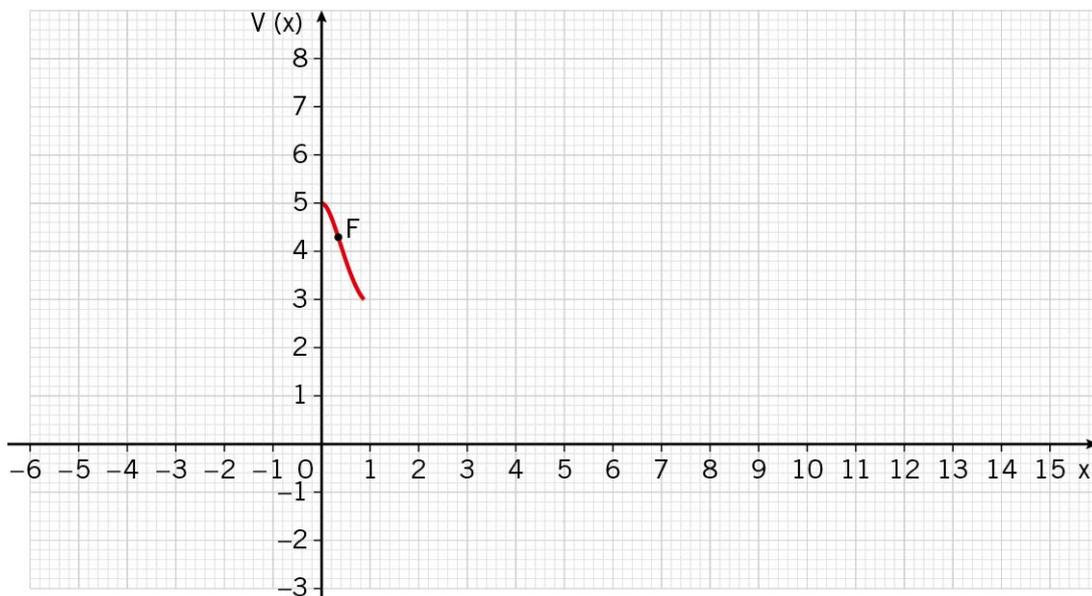
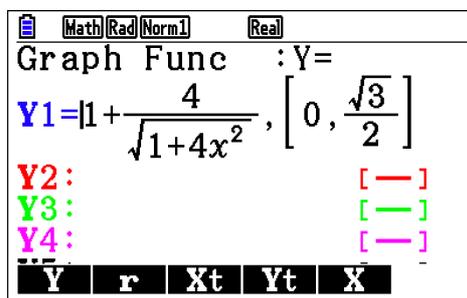


Figura 2. Andamento dell'energia potenziale in funzione della distanza della carica q_c dal segmento AB .

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

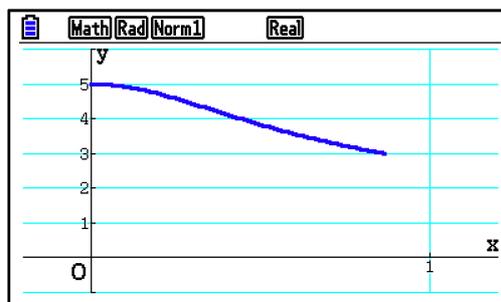
In alternativa allo studio della funzione possiamo servirci della calcolatrice grafica per tracciare il grafico di $U(x)$.

Nell'ambiente Graph in Y1 introduciamo la funzione sostituendo U con 1:

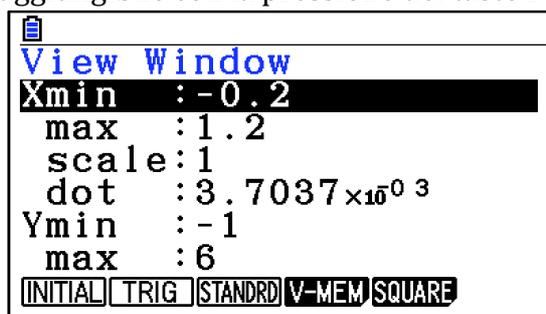


Il comando $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ che segue l'espressione matematica della funzione indica alla calcolatrice che il grafico va tracciato solo nell'intervallo assegnato.

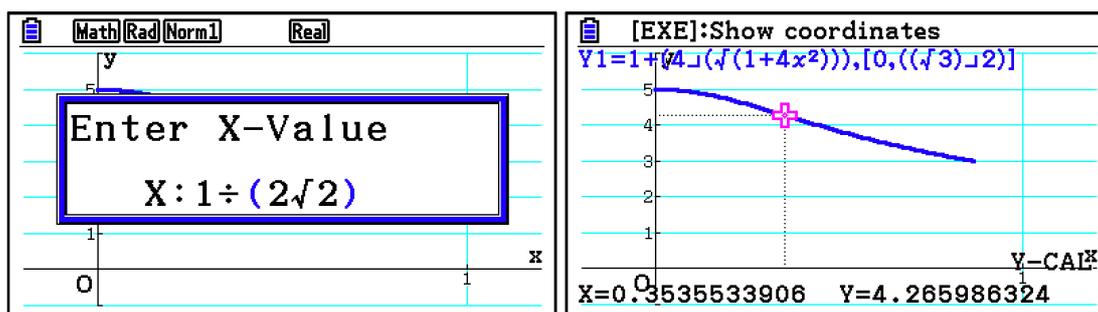
Con il tasto F6 otteniamo la rappresentazione grafico di $U(x)$:



Per ottenere il grafico rappresentato occorre definire i limiti di variabilità degli assi nell'ambiente V-Window raggiungibile con la pressione del tasto F3:



Con i comandi F4-F6-F1 possiamo tracciare il punto di flesso introducendo l'ascissa:



Quesito 4

La legge oraria fornita dal testo esprime le coordinate parametriche di un punto (P) del piano al variare del tempo:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = a(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Per determinare la distanza dall'origine (O) del punto materiale P al tempo $t = \tau$ scriviamo intanto le coordinate di P in quell'istante:

$$\begin{cases} x(\tau) = a \operatorname{sen}(\omega \tau) \\ y(\tau) = a(1 - \cos(\omega \tau)) \end{cases}$$

La distanza tra O e P vale, quindi,

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2(\tau) + y^2(\tau)} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(\omega \tau) + a^2(1 - 2 \cos(\omega \tau) + \cos^2(\omega \tau))}$$

Che svolgendo i calcoli fornisce:

$$\overline{OP} = \sqrt{2a^2(1 - \cos(\omega \tau))}$$

Per determinare la direzione del vettore velocità all'istante $t = 0$ deriviamo l'equazione oraria:

$$\begin{cases} x'(t) = a\omega \cos(\omega t) \\ y'(t) = a\omega \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} x'(0) = a\omega \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \vec{v} = (a\omega; 0)$$

Il vettore velocità, al tempo $t = 0$, è diretto lungo il semiasse positivo delle ascisse.

Ripetiamo il ragionamento per determinare la direzione del vettore accelerazione al tempo $t = 0$.

Deriviamo ancora rispetto al tempo e otteniamo:

$$\begin{cases} x''(t) = -a\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \\ y''(t) = a\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = a\omega^2 \end{cases} \quad \vec{a} = (0; a\omega^2)$$

Il vettore accelerazione, al tempo $t = 0$, è diretto lungo il semiasse positivo dell'asse delle ordinate.

Quesito 5

Per determinare l'intervallo di tempo calcoliamo per prima cosa la velocità raggiunta dall'elettrone.

Per farlo applichiamo il principio di conservazione dell'energia relativistica: inizialmente l'elettrone fermo possiede energia di riposo (mc^2) che deve essere uguale all'energia cinetica relativistica ($mc^2 \cdot (\gamma - 1)$).

Uguagliando le due energie otteniamo:

$$mc^2 \cdot (\gamma - 1) = mc^2$$

da cui si ricava $\gamma = 2$.

Ricordando poi che $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$, elevando ambo i membri al quadrato e risolvendo rispetto a

v otteniamo, dopo alcuni passaggi:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

Per calcolare il tempo seguiamo il seguente ragionamento: l'equazione del moto di una particella, di carica e con massa a riposo m , in un campo elettrico uniforme e costante E vale:

$$p'(t) = e \cdot E \quad (1)$$

Dove con $p(t)$ abbiamo indicato la quantità di moto relativistica della particella. La derivata rispetto al tempo della quantità di moto fornisce la forza agente che, in questo caso, è la forza del campo elettrico.

Ma la quantità di moto relativistica può essere espressa come $p = m \cdot v \cdot \gamma$ per cui la (1) diventa:

$$m \frac{d}{dt}(v\gamma) = e \cdot E \quad (2)$$

Moltiplicando ambo i membri per dt si ottiene:

$$m \cdot d(v\gamma) = e \cdot E \cdot dt \quad (3)$$

Integrando ambo i membri della (3) si ottiene:

$$\int m \cdot d(v\gamma) = \int e \cdot E \cdot dt$$

Dalla quale abbiamo:

$$m \cdot v \cdot \gamma = e \cdot E \cdot t + C$$

Poiché al tempo $t = 0$, si ha $v = 0$, otteniamo: $C = 0$.

Per cui:

$$m \cdot v \cdot \gamma = e \cdot E \cdot t \quad (4)$$

Dalla (4) ricaviamo t , cioè il tempo necessario per raggiungere la velocità v :

$$t = \frac{m \cdot v \cdot \gamma}{e \cdot E} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c \cdot 2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,0 \cdot 10^6} \text{ s} = 2,96 \cdot 10^{-9} \text{ s} \sim 3,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Quesito 6

Poiché la temperatura varia linearmente da T_1 a T_2 , l'equazione che descrive l'andamento di T al variare della distanza dalla sorgente è quella di una retta passante per i punti $(0, T_1)$ e (l, T_2) di coefficiente angolare $m = \frac{T_2 - T_1}{l}$.

Dunque:

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x \quad \text{con } 0 \leq x \leq l$$

Poiché $v(T) = a \cdot \sqrt{T}$ allora:

$$v(x) = a \sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}$$

Essendo $v(x)$ la derivata prima di $x(t)$ rispetto alla variabile t , possiamo riscrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{dx}{dt} = a \sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili. Dopo aver separato le due variabili x e t scrivendo:

$$\frac{dx}{\sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}} = a dt$$

possiamo integrare entrambi i membri ricordando che al tempo $t = 0$ corrisponde la distanza $x = 0$ e alla distanza $x = l$ il tempo richiesto dal problema che indichiamo con t_f .

Pertanto:

$$\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x}} = \int_0^{t_f} a dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x\right)^{-\frac{1}{2}} dx = a[t]_0^{t_f}$$

$$\frac{2l}{T_2 - T_1} \left[\sqrt{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x} \right]_0^l = at_f \quad \Rightarrow \quad \frac{2l}{T_2 - T_1} (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) = at_f$$

$$t_f = \frac{2l}{a(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})}$$

Quesito 7

Nel grafico del testo non sono riportate le grandezze fisiche rappresentate nei due assi del piano cartesiano.

Poiché ci si chiede se il grafico può rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione da un'altra carica fissa dello stesso segno, è plausibile supporre che sull'asse delle ordinate sia rappresentata la variabile v .

Possiamo ipotizzare, poi, che le due cariche siano inizialmente a una distanza L e che per analizzare il moto della carica libera di muoversi (q) sia comodo servirsi di un sistema di riferimento con l'origine sulla posizione iniziale della carica q e con il verso positivo delle ascisse che va da Q a q . Facciamo l'ipotesi che le due cariche siano nel vuoto, in modo che su di esse non agiscano forze di attrito.

Pertanto, nel grafico del testo, sull'asse delle ascisse rappresenteremo i valori che assume la **posizione** di q mentre si allontana da Q .

Il diagramma in questione, quindi, sarà il grafico della funzione $v(x)$ e, poiché la velocità iniziale di q è zero, il primo punto del grafico è l'origine.

Dato che la forza di Coulomb è conservativa possiamo utilizzare il principio di conservazione dell'energia. Nello stato iniziale l'energia totale sarà solamente potenziale:

$$E_0 = U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{L}$$

Mentre nell'istante in cui q si trova ad una generica distanza x dalla posizione iniziale, l'energia totale sarà la somma tra quella potenziale e quella cinetica:

$$E = U + K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{L+x} + \frac{1}{2}mv^2$$

Uguagliando le due formule otteniamo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{L+x} + \frac{1}{2}mv^2$$

da cui:

$$v^2 = \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+x} \right)$$

e, infine:

$$v(x) = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+x} \right)}$$

Per verificare se il grafico in figura 1 può essere il grafico di $v(x)$, controlliamo cosa accade a $v(x)$ quando la carica q si allontana indefinitamente da Q , cioè quando $x \rightarrow +\infty$.

Essendo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 mL}}$$

$v(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione:

$$y = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 mL}}$$

per cui non può avere il grafico riprodotto nel testo.

Quesito 8

a) Sfruttando una delle formule di duplicazione del coseno

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$$

si ottiene che:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (1)$$

A partire dalla legge oraria

$$x(t) = a \cdot \operatorname{sen}^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2)$$

utilizzando la (1) possiamo riscrivere la (2) nella forma:

$$x(t) = a \cdot \frac{1 - \cos \left(6t - \frac{\pi}{2} \right)}{2}$$

Da cui:

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{sen} 6t \quad (3)$$

Dalla (3) possiamo dedurre facilmente che l'ampiezza del moto è $\frac{a}{2}$ e il periodo $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

b) Per determinare l'istante in cui per la prima volta il punto in moto raggiunge la massima distanza dall'origine è sufficiente considerare che la funzione $a \cdot \operatorname{sen}^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right)$ assume, per le caratteristiche della funzione seno, solo valori nell'intervallo $[0, a]$.

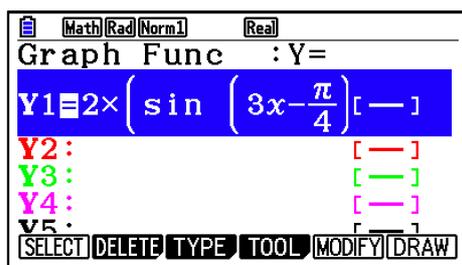
Pertanto, il primo punto di massimo di $x(t)$ si otterrà per il primo valore di t per il quale $\operatorname{sen}^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = 1$.

$$\text{Poiché } \operatorname{sen}^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow 3t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 3t = \frac{3}{4}\pi + k\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}.$$

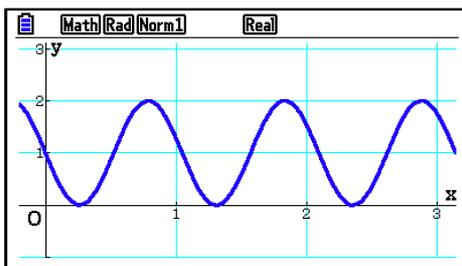
Il primo dei valori di t al punto precedente si ottiene per $k = 0$ e vale $t = \frac{\pi}{4}$ s.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

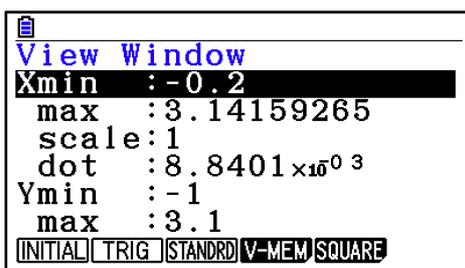
Con la calcolatrice grafica possiamo rappresentare la funzione $x(t)$ ponendo, per esempio, $a = 2$. Nell'ambiente "Graph" introduciamo la funzione $y1 = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$.



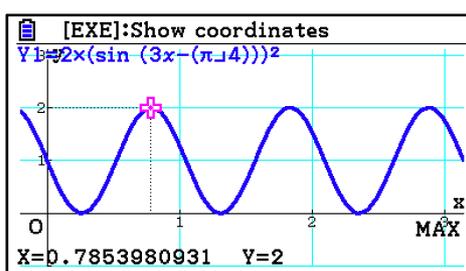
Premendo F6 otteniamo la sua rappresentazione grafica:



Affinché il grafico sia quello riprodotto in figura occorre impostare le corrette limitazioni sugli assi. Per far ciò premiamo F3:



Premendo **Exit** ritorniamo al grafico. Premendo F5 e F2 in successione nella finestra compare un cursore rosso a forma di croce nella posizione corrispondente al primo massimo.



Leggendo sullo schermo la sua ascissa $X = 0.7853980931$ possiamo verificare che essa corrisponda a $\frac{\pi}{4}$ nell'ambiente Run-Matrix scrivendo $\pi/4$ e premendo S-D

