VERSO LA SECONDA PROVA DI MATEMATICA 2024

QUESITI E PROBLEMI

Funzioni, successioni, limiti e continuità

1 Determina il dominio della funzione:

$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2-1},$$

quindi classifica i suoi punti di singolarità e trova i suoi asintoti.

[D: $x \neq \pm 1$; singolarità: $x = 1$, I specie, salto 1; $x = -1$, II specie; asintoti: $x = -1$ as.ver.; $y = -1$ as.orizz. sinistro; $y = 1$ as.orizz. destro]

2 La progressione geometrica

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ con } n \geq 1,$$

è tale che $a_2 - a_3 = \frac{8}{9}$ e la somma S_3 dei primi tre termini è pari a $\frac{76}{9}$.

Verifica che esistono due distinte progressioni geometriche che soddisfano le ipotesi e di ciascuna trova la somma S_n dei primi n termini e calcola il limite di S_n per $n \to +\infty$.

$\left[a_n = \frac{196}{27} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} \text{ con } \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{686}{81}, \text{ oppure } a_n = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ con } \lim_{n \to +\infty} S_n = 12\right]$

3 Considera la seguente famiglia di funzioni individuate dal parametro reale a e definite nel loro dominio naturale:

$$F = \left\{ f_a(x) = \frac{x}{ax+1}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimostra che, per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$:

a. $(f_a \circ f_b)(x) = (f_b \circ f_a)(x)$;

b. $((f_a \circ f_b) \circ f_c)(x) = (f_a \circ (f_b \circ f_c))(x)$;

c. $f_a^{-1}(x) = f_{-a}(x)$;

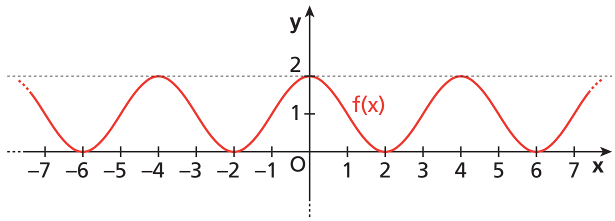
d. $\underbrace{(f_a \circ f_a \circ \ldots \circ f_a)}_{n \text{ volte}}(x) = f_{na}(x), n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

4 Dimostra che se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni definite e continue in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, con $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in \,]a; b[$ per il quale $f(c) = g(c)$.

Utilizza questo teorema per dimostrare che l'equazione $2^{-x} = \sqrt{x}$ ammette una sola soluzione nell'intervallo $[0; 1]$.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone
Hanno collaborato Luca Addiucci, Filippo Becca, Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Ludovica Biondi, Fabio Breda, Jacopo Costantini, Sebastiano Don, Mariagrazia Fabbri, Luca Ferrari, Valentina Folloni, Mattia Garatti, Chiara Guidi, Lorenzo Meneghini, Carmine Emanuele Monaco, Riccardo Moraschi, Franco Nuzzi, Thomàs Satzoukidis, Michele Vergari

5 **LEGGI IL GRAFICO** In figura è rappresentata una porzione del grafico della funzione $f(x) = a\cos bx + c$, con a, b e c parametri reali e $b > 0$.



a. Deduci, dal grafico, i valori dei parametri a, b e c.

b. Data la funzione $g(x) = \big|\,|x| + \alpha\,\big|$, determina il valore del parametro reale α affinché i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersechino esattamente in 9 punti.
(**SUGGERIMENTO** Dimostra che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ sono simmetrici rispetto all'asse y; inoltre, il numero di punti in cui si intersecano è dispari per ipotesi, quindi…)

c. Con il valore di α trovato al punto precedente, disegna il grafico di $g(x)$ e determina graficamente il numero di soluzioni reali dell'equazione $g(x) = k$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

d. Determina graficamente le soluzioni della disequazione $f(x) \leq g(x)$.

[a) $a = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = 1$; b) $\alpha = -2$; c) $k < 0$: 0 soluzioni; $k = 0 \vee k > 2$: 2 soluzioni; $0 < k < 2$: 4 soluzioni; $k = 2$: 3 soluzioni; d) $x \leq -4 \vee -3 \leq x \leq -1 \vee x = 0 \vee 1 \leq x \leq 3 \vee x \geq 4$]

6 **REALTÀ E MODELLI** **Lupi in libertà** Il numero N degli esemplari di una popolazione di lupi in un parco naturale ha un andamento discreto ma può essere approssimata dal modello continuo:

$$N(t) = \frac{60}{1 + e^{-at}}, \text{ con } t \geq 0,$$

dove il tempo di osservazione t è misurato in anni, $N(t)$ è il numero di esemplari all'istante t e $a > 0$ rappresenta il tasso di crescita istantaneo nel modello continuo, espresso in $(\text{anni})^{-1}$.

shutterstock

a. Prevedendo che dopo 3 anni dall'inizio dell'osservazione la popolazione sia di 40 esemplari, calcola il valore di a.

b. Calcola il limite di $N(t)$ per t tendente a $+\infty$ e verificalo mediante la definizione di limite.

c. Estendendo il modello a $t < 0$ e utilizzando il valore di a trovato precedentemente, quanti anni prima dell'inizio dell'osservazione la popolazione era di 20 esemplari?

d. Calcola e verifica il limite di $N(t)$ per t tendente a $-\infty$.

[a) $a = \frac{\ln 2}{3}$ $(\text{anni})^{-1}$; b) 60; c) 3 anni prima; d) 0 esemplari]

7 Sia AOB un settore circolare di raggio 1 e ampiezza 90°. Considera un punto P appartenente all'arco $\overset{\frown}{AB}$ e indica con x la distanza di P da OB. Dopo aver tracciato la tangente t all'arco $\overset{\frown}{AB}$ passante per P, indica con T il punto di intersezione tra t e la semiretta OA.

a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $f(x) = \overline{PT}$ e determina il suo dominio naturale, prescindendo dalla situazione geometrica.

b. Stabilisci se la funzione $f(x)$ è pari o dispari.

c. Stabilisci se la funzione $f(x)$ è continua in corrispondenza di $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$, e classifica gli eventuali punti di non continuità.

d. Considera la funzione $g(x) = \overline{PT}^2$, sempre nel suo dominio naturale, e determina gli eventuali asintoti di $f(x)$ e $g(x)$.

[a) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$; $D = [-1; 0[\cup]0; 1]$; b) funzione dispari; c) continua in $x = \pm 1$; singolarità di II specie in $x = 0$; d) $f(x)$: $x = 0$ as.ver.; $g(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$: $x = 0$ as.ver., $y = -1$ as. orizz.]

8 Della funzione

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{cx + d}$$

si sa che passa per il punto di coordinate (2; 0) e che possiede due asintoti, uno verticale di equazione $x = -3$ e uno obliquo di coefficiente angolare 1.

a. Determina una possibile quaterna dei parametri a, b, c e d presenti nella funzione.

b. Determina il dominio e classifica i punti di discontinuità e di singolarità della funzione.

c. Indicato con P un generico punto del grafico della funzione e chiamate H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sull'asse delle ascisse e delle ordinate, calcola il valore del limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\overline{PH} \cdot \overline{PK}}{\overline{PK}^2 - 4} \right)^x.$$

[a) per esempio: $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $d = 3$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$; b) $D =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$; $x = -3$ singolarità di II specie; c) e^{-3}]

9 **REALTÀ E MODELLI** **Scotta!** Secondo la *legge di raffreddamento* di Newton, la temperatura T in gradi °C di una tazza di tè all'istante t è:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}, \text{ con } t \geq 0,$$

dove il tempo t è espresso in minuti, $T_a = 20$ °C indica la temperatura dell'ambiente e $T_0 = 75$ °C indica la temperatura del tè all'istante $t = 0$.

a. Determina l'unità di misura e il valore della costante k se, dopo 20 minuti dall'istante iniziale la temperatura del tè è di 25 °C.

b. Dopo quanto tempo dall'istante iniziale la temperatura del tè arriva a 21 °C?

c. Verifica, tramite la definizione di limite, che a lungo andare la temperatura del tè uguaglierà quella dell'ambiente.

shutterstock

[a) $k \simeq 0{,}12\ \text{min}^{-1}$; b) $t \simeq 33{,}4$ min]

Derivate, derivabilità e teoremi del calcolo differenziale

10 Determina i valori di a, b e c tali che i grafici delle funzioni

$$f(x) = cx^3 - 3x^2 + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{ax^2}{bx^2 + 3}.$$

siano tangenti nel punto $P(-1; 1)$. [$a = 2$, $b = -1$, $c = -3$]

11 Per ciascuna delle due funzioni

$$f(x) = \arcsin x \quad \text{e} \quad g(x) = \arctan x,$$

determina per quale valore di x la tangente al grafico nel punto di ascissa x ha coefficiente angolare 1. [0; 0]

12 Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} [x^2 + \cos(2x)]^{\frac{1}{2x}}.$$

[1]

13 Se la funzione $g(x) = f(x) - f(3x)$ è tale per cui $g'(1) = 2$ e $g'(3) = 5$, quanto vale la derivata della funzione $f(x) - f(9x)$ in $x = 1$? Supponi che $f(x)$ sia una funzione ovunque derivabile in $\mathbb{R}$. [17]

14 È data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + k}.$$

a. Determina per quali valori di k la funzione è strettamente crescente in ogni intervallo del suo dominio.

b. Stabilisci se si può determinare un valore del parametro k in modo che la funzione soddisfi, nell'intervallo [0; 2], le ipotesi del teorema di Rolle. [a) $-1 \leq k \leq 1$; b) $\nexists k \in \mathbb{R}$]

15 Assegnata una funzione $y = f(x)$ continua e derivabile nel suo dominio, scegli un generico punto $Q(a; b)$ del suo grafico e considera le seguenti tre rette: la retta t tangente in Q al grafico della funzione; la retta r parallela a t e passante per l'origine degli assi; la retta s passante per Q e parallela all'asse y.

a. Determina l'equazione del luogo Γ dei punti P ottenuti come intersezione delle rette r e s.

b. Applica il risultato ottenuto alle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \ln x$; **2.** $f(x) = e^x$; **3.** $f(x) = \frac{1}{x}$.

c. Estendi la ricerca del luogo Γ al caso del grafico della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$; in quest'ultimo caso traccia un grafico plausibile del luogo Γ.

[a) $y = x \cdot f'(x)$; b) $y = 1$ con $x > 0$; $y = xe^x$ con $x \in \mathbb{R}$; $y = -\frac{1}{x}$ con $x \neq 0$; c) $y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ con $-1 < x < 1$]

16 È data la funzione:

$$f_a(x) = \begin{cases} ax^2 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} + a & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

a. Determina il valore di a in modo che la funzione $f_a(x)$ sia continua in $x = 0$ e studia la derivibilità, in $x = 0$, della funzione $f(x)$ così ottenuta.

b. Determina gli intervalli, eventualmente approssimati, nei quali la funzione $f(x)$ è crescente.

c. Verifica che $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[1; 9]$ e trova le coordinate del punto P del grafico di $f(x)$ assicurato dal teorema.

[a) $a = 1$; punto angoloso in $x = 0$; b) $f(x)$ crescente in $]a; +\infty[$, con $-\frac{1}{2} < a < 0$; c) $P(4; 3)$]

17 Considera le funzioni f, g: $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$f(x) = -\ln^2 x + \ln x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 2.$$

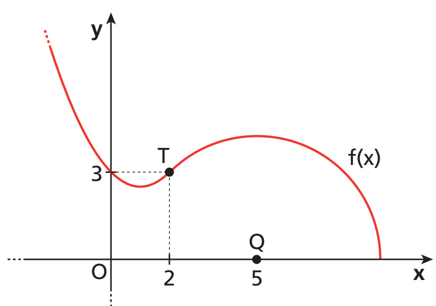
a. Verifica che i loro grafici hanno due punti in comune, uno dei quali di ordinata nulla.

b. Indicato con A il punto in comune ai due grafici di ascissa minore, determina l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle tangenti ai grafici nel punto A. Approssima il risultato ai gradi e primi sessagesimali.

c. Determina le ascisse dei punti P del grafico di $f(x)$ per i quali la tangente in P al grafico stesso passi per l'origine.

[a) $A(1; 2)$, $B(e^2; 0)$; b) $63° 26'$; c) $x = e^{\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}}$]

18 **LEGGI IL GRAFICO** La figura rappresenta il grafico della funzione $y = f(x)$, costituito dall'unione di un arco di parabola passante per il punto $(0; 3)$ e un arco di circonferenza di centro $Q(5; 0)$ che hanno una tangente comune nel punto di coordinate $T(2; 3)$.



a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $f(x)$.

b. Trova i punti stazionari A e B di $f(x)$, con $x_A < x_B$, e determina il punto C sull'asse delle ascisse in modo che l'area del triangolo APC sia 5, dove $P(5; 5)$.

c. Determina l'equazione della parabola che ha per asse di simmetria l'asse x ed è tangente a $f(x)$ nel punto T.

[a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{18 - (x-5)^2} & \text{se } 2 < x \leq 5 + 3\sqrt{2} \end{cases}$; b) $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$, $B(5; 3\sqrt{2})$; $C_1(-7; 0)$, $C_2(1; 0)$; c) $x = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}$]

Massimi, minimi, flessi e studio di funzioni

19 REALTÀ E MODELLI **Pronta guarigione** La velocità in cm/s del flusso d'aria espulsa durante un colpo di tosse si può calcolare con buona approssimazione mediante la formula:

$$v(r) = A(r_0 - r)r^2, \text{ con } \frac{r_0}{2} \le r \le r_0,$$

dove r indica il raggio, in cm, della trachea durante il colpo di tosse, r_0 il raggio, in cm, a riposo e A è una costante positiva espressa in $(\text{cm}^2 \cdot \text{s})^{-1}$ il cui valore dipende dalla lunghezza della trachea. Dimostra che la velocità del flusso diventa massima quando la trachea è contratta del 33% circa.

shutterstock

20 Determina l'area massima del rettangolo che può essere inscritto nella regione di piano compresa tra le due parabole di equazione: $\alpha: y = -x^2 + 6x + 1$ e $\beta: y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{3}{2}$. $\left[\frac{256\sqrt{2}}{9}\right]$

21 Considera la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(2x - x^2).$$

Dimostra che la funzione è limitata, non è iniettiva, ha un minimo assoluto ma non ha massimi.
Detta α l'ascissa del punto di minimo, calcola il valore di $\alpha + f(\alpha)$. $[\alpha = 1; \alpha + f(\alpha) = 1]$

22 Determina k in modo tale che la funzione

$$f(x) = \sin x + kx$$

risulti crescente e ammetta flessi a tangente orizzontale. $[k = 1]$

23 Data la funzione:

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x,$$

considera la retta t_k tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = k$.
Determina gli eventuali massimi o minimi relativi per il coefficiente angolare m_k della retta t_k.

$\left[\text{max relativo per } k = -2,\ m_{-2} = 25; \text{ min relativo per } k = \frac{1}{2},\ m_{\frac{1}{2}} = -\frac{25}{4}\right]$

24 Discuti, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione:

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - 2}{x - 2} = \lambda.$$

$\left[\lambda \le -1: 1 \text{ sol. } (+);\ -1 < \lambda < \frac{1}{2}: 1 \text{ sol. } (-) \text{ e } 1 \text{ sol. } (+); \lambda = \frac{1}{2}: 1 \text{ sol. } (0) \text{ e } 1 \text{ sol. } (+); \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{5}: 2 \text{ sol. } (+); \lambda = \frac{3}{5}: 1 \text{ sol. doppia } (+); \frac{3}{5} < \lambda \le 1: 0 \text{ sol.}; \lambda > 1: \text{sol. } (+)\right]$

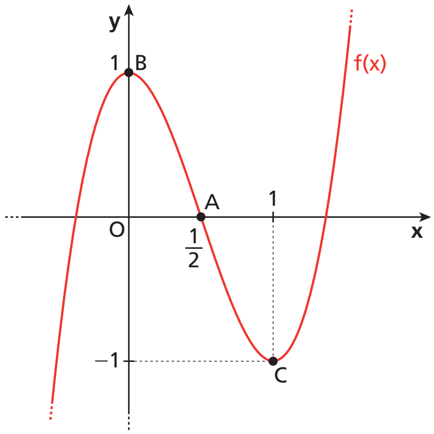
25 Di una funzione polinomiale intera $f(x)$, si sa che:

$$f(0) = 2; \quad f(2) = 0; \quad f'(0) = -1; \quad f''(2) = 8; \quad f^{(n)}(x) = 0 \text{ per } n \ge 4.$$

a. Determina l'espressione analitica di $f(x)$.
b. Rappresenta il grafico di $f(x)$.
c. Determina la soluzione dell'equazione $f(x) = 4$ nell'intervallo $[2; 3]$, approssimando il risultato a meno di un decimo.
d. Applica il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0; 3]$ e determina il valore c assicurato dal teorema.

$\left[\text{a) } f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; \text{ c) } 2{,}6; \text{ d) } c = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right]$

26 **LEGGI IL GRAFICO** In figura è rappresentato il grafico di una funzione polinomiale intera di terzo grado.



a. Utilizzando le informazioni riportate in figura, determina l'espressione analitica di $f(x)$.

b. Scrivi l'equazione della retta normale al grafico della funzione $f(x)$ nel punto A.

c. Studia la concavità della funzione e determina i flessi.

d. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di flesso.

[a) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$; b) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$; c) concavità verso l'alto per $x > \frac{1}{2}$; $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ flesso ascendente; d) $y = -3x + \frac{3}{2}$]

27 Date le funzioni

$$f(x) = 2\ln x - x \quad \text{e} \quad g(x) = e^x - 1,$$

indica con Γ il grafico di $f(x)$ e con Φ il grafico di $g(x)$.

a. Ricava l'equazione della retta t tangente a Φ nel suo punto di intersezione con l'asse y, quindi calcola la distanza di un punto generico M di Γ da t.

b. Determina le coordinate del punto di Γ per cui tale distanza diventa minima e specifica qual è il corrispondente valore della distanza.

c. Trova il punto di Γ in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $y = x$. Che cosa osservi?

d. Scrivi l'equazione di tale retta tangente.

[a) $t: y = x$; $d(M, t) = \sqrt{2} \cdot (x_M - \ln x_M)$; b) $M(1; -1)$; $d = \sqrt{2}$; c) $M(1; -1)$; d) $y = x - 2$]

28 Considera la famiglia di funzioni:

$$f(x) = (ax + b)e^{-x^2},$$

dove a e b sono parametri reali, con $a > 0$.

a. Determina il numero di punti stazionari in base ai valori di a e b.

b. Classifica i punti stazionari trovati.

c. Determina i valori di a e b per i quali il grafico della funzione ammette un punto stazionario in $x = -\sqrt{2}$ e passa per il punto $P(0; 3)$.

d. Considerata la funzione con i valori di a e b trovati al punto precedente, stabilisci se la funzione ammette un flesso nell'intervallo $[0; 1]$.

[a) due punti stazionari; b) un minimo e un massimo relativi; c) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 3$; d) sì]

Integrali, calcolo di aree e volumi

29 Determina la famiglia di primitive $F_c(x)$ della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{(1+e^{\sqrt{x}})^2}.$$

Successivamente trova per quale valore di c risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} F_c(x) = 1.$$

$\left[\text{a) } F_c(x) = \frac{2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}{1+e^{\sqrt{x}}} - 2\ln(1+e^{\sqrt{x}}) + c;\ \text{b) } c = 1\right]$

30 Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\frac{1}{2}x^2} (e^t - 1)\,dt}{x^4}.$$

$\left[\frac{1}{8}\right]$

31 Dimostra che un'ellisse avente semiassi di lunghezza a e b, con $a > 0$, $b > 0$, racchiude un'area pari a πab.

32 Determina un valore di k, con $k > 2$, per il quale il valor medio della funzione

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)e^{2-x}$$

nell'intervallo $[2; k]$ vale $\frac{39}{16} - \frac{199}{16}e^{-4}$.

$[k = 6]$

33 Un corpo puntiforme si muove di moto rettilineo, con accelerazione definita dalla funzione:

$$a(t) = \sqrt[3]{t},$$

dove t è espresso in secondi e $a(t)$ in m/s^2. Determina le leggi orarie della posizione $x(t)$, in m, e della velocità $v(t)$, in m/s, del corpo sapendo che $v(8) = 12$ e $x(1) = 0$.

$\left[v(t) = \frac{3}{4}t\sqrt[3]{t};\ x(t) = \frac{9}{28}(t^2\sqrt[3]{t} - 1)\right]$

34 Calcola, in funzione di $k > 0$, i volumi $V_x(k)$ e $V_y(k)$ dei solidi ottenuti da una rotazione completa rispettivamente intorno all'asse x e intorno all'asse y della regione di piano sottesa al grafico di $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ nell'intervallo $0 \le x \le k$. Calcola poi i seguenti limiti:

$$\lim_{k \to +\infty} V_x(k) \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} V_y(k)$$

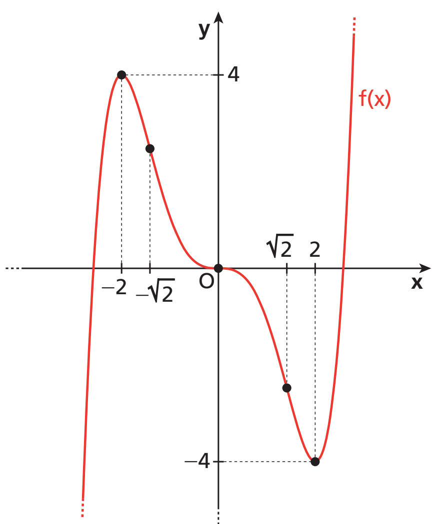
$\left[V_x(k) = \pi(1 - e^{-k});\ V_y(k) = 2\pi\left(4 - 4e^{-\frac{k}{2}} - 2ke^{-\frac{k}{2}}\right);\ \pi;\ 8\pi\right]$

35 **LEGGI IL GRAFICO** In figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$, dove sono messi in evidenza i punti di massimo e minimo relativi e i punti di flesso. Si sa inoltre che $f(x)$ è una funzione dispari.

a. Traccia i grafici qualitativi delle funzioni $y = f'(x)$ e $y = F(x)$, dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$ tale che $F(0) = 0$.

b. Sapendo che l'espressione della funzione è del tipo $f(x) = ax^5 + bx^3$, utilizza i dati forniti dal grafico per determinare i valori dei parametri a e b.

$\left[\text{b) } a = \frac{3}{16}, b = -\frac{5}{4}\right]$



36 Si consideri la seguente famiglia di funzioni parametriche:

$$f_k(x) = \frac{k(x^2-4)}{x^2+4}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

a. Determina per quale valore di k la tangente al grafico della funzione $f_k(x)$ nel suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse è parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

b. Indica con $f(x)$ la funzione della famiglia corrispondente al valore di k trovato al punto precedente. Traccia il grafico di $f(x)$ indicando, in particolare, i punti stazionari, gli estremi relativi, i flessi e gli asintoti.

c. Calcola l'area della regione finita di piano R compresa tra il grafico della curva e l'asse delle ascisse.

d. Si vuole costruire una trottola il cui profilo è ottenuto facendo ruotare la regione di piano R intorno all'asse delle ascisse. Determina il volume di tale trottola in cm^3 (considera che l'unità sugli assi del piano cartesiano è pari a 1 cm).

$\left[\text{a) } k=2\text{; b) min}(0;-2)\text{; } y=2 \text{ asint. orizz.; flessi}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3};-1\right)\text{; c) } 4\pi-8\text{; d) } 8\pi(4-\pi)\text{ cm}^3\right]$

37 **REALTÀ E MODELLI** **Senza sprechi** La portata di una conduttura idraulica è variabile nel tempo secondo la legge:

$$Q(t) = 40\sin t + 50, \text{ con } t \geq 0,$$

dove il tempo t è misurato in minuti e la portata $Q(t)$ è espressa in L/min.

a. Calcola il volume di acqua (in litri) che attraversa la conduttura nei primi 10 minuti.

b. Calcola la portata media, in L/min, al minuto, di acqua che attraversa la conduttura nell'intervallo di tempo [10; 15] minuti.


shutterstock

[a) circa 573,56 L; b) 49,36 L/min]

Calcolo combinatorio e probabilità

38 Considerato il triangolo equilatero ABC di lato l, qual è la probabilità che prendendo un punto in modo casuale interno al triangolo esso appartenga al cerchio inscritto ad ABC?
Calcola poi la probabilità che un punto scelto sempre in modo casuale appartenga al cerchio inscritto in ABC oppure al triangolo ABO, dove O è il centro del cerchio inscritto in ABC. [circa 60,5%; circa 73,6%]

39 In un'autoscuola il 60% degli iscritti frequenta regolarmente le lezioni di teoria per il superamento dell'esame. La probabilità che un iscritto superi l'esame di teoria se ha seguito regolarmente le lezioni è 0,82, mentre la probabilità di superarlo per chi non ha seguito regolarmente le lezioni è 0,62.

a. Qual è la probabilità che un iscritto all'autoscuola non superi l'esame di teoria?

b. Sapendo che un iscritto ha superato l'esame di teoria, qual è la probabilità che non abbia frequentato regolarmente le lezioni di teoria? [a) 26%; b) circa 33,5%]

40 **REALTÀ E MODELLI** **A canestro** Cecilia e Jasmine sono due amiche cestiste. Cecilia centra il canestro con una probabilità dell'80%, mentre Jasmine fa canestro 3 volte su 4. Le due amiche si sfidano in una gara secondo queste regole:

- lanciano un dado a 6 facce non truccato con i numeri da 1 a 6 e se esce un numero pari inizia Cecilia, se esce un numero dispari inizia Jasmine;
- le due ragazze tirano a turno e vince la prima che fa canestro.

Calcola:

a. la probabilità che Jasmine vinca al quarto lancio;

b. la probabilità che Cecilia vinca in uno dei primi cinque lanci;

c. la probabilità che a lanciare sia stata Jasmine, se si ottiene un canestro per la prima volta al tredicesimo lancio.

$\left[\text{a) } \frac{3}{800}\text{; b) } \frac{263}{500}\text{; c) } \frac{15}{31}\right]$


shutterstock

41 **REALTÀ E MODELLI** **Fino alla foce** Il diametro dei granelli di sabbia del letto di un fiume, espresso in millimetri, è descritto da una variabile aleatoria continua X.


shutterstock

a. Calcola per quale valore di k la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & \text{se } 0{,}6 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0{,}6 \ \vee \ x > 2 \end{cases}$$

può rappresentare una densità di probabilità per la variabile X.

b. Determina il diametro medio dei granelli di sabbia.

c. Qual è la probabilità che un granello scelto a caso abbia diametro compreso tra 0,6 mm e 1 mm?

$\left[\text{a) } k = \frac{6}{7}\text{; b) } \frac{6}{7} \ln \frac{10}{3} \simeq 1{,}03 \text{ mm; c) } \frac{4}{7}\right]$

42 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

a. $C_{4,8} = \binom{8}{4}$

b. $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

c. $C_{23,2} + C_{23,3} = C_{24,3}$

d. $C'_{4,3} = D_{6,3}$

[a) F; b) V; c) V; d) F]

43 Il reparto del controllo qualità di un'azienda produttrice di personal computer esegue a campione dei test di affidabilità sui propri prodotti e il 95% dei PC controllati supera le verifiche di affidabilità.

a. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso due PC, entrambi superino il test?

b. Qual è la probabilità che, su tre PC controllati, si abbiano esattamente due successi nei test?

c. Qual è la probabilità che, sul controllo di quattro PC, si riscontri almento un insuccesso?

[a) 0,9025; b) circa 0,135; c) circa 0,185]

44 **REALTÀ E MODELLI** **Automobili in panne** Una società di assistenza stradale sta elaborando le statistiche relative alle richieste di soccorso ricevute per telefono nell'ultimo mese. Le chiamate seguono una distribuzione di Poisson con un tasso medio di $\lambda = 4$ chiamate ogni 3 minuti.


shutterstock

a. Calcola la probabilità che, in un intervallo di 3 minuti, si ricevano esattamente 2 chiamate di soccorso stradale e la probabilità che non se ne riceva nessuna.

b. Calcola il valore atteso e la deviazione standard del numero di chiamate in un intervallo di 3 minuti.

c. Quante chiamate ci si può attendere in un'ora?

[a) circa 0,1465; circa 0,0183; b) 4; 2; c) 80]

Geometria analitica nello spazio

45 Considera il piano α passante per i punti $A(-1; -2; 1)$, $B(-1; 1; 4)$ e $C(-4; -2; 4)$ e il punto $D(-1; -2; 4)$ non appartenente ad esso. Presa la sfera Σ di centro D e tangente al piano α, verifica che il punto di tangenza è il baricentro del triangolo ABC. [Σ: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 8z + 18 = 0$; $G(-2; -1; 3)$]

46 Sono assegnati i punti $A(3; 0; -1)$ e $B(0; 2; -2)$ e la retta r di equazione:

$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -4 - 4t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

a. Verifica che la retta AB e la retta r sono incidenti in un punto P e determina le coordinate di P.

b. Ricava l'equazione del piano α contenente le rette AB e r.

c. Determina l'equazione della superficie sferica passante per A e B e avente il centro su r.

[a) $P(-3; 4; -3)$; b) $2x + y - 4z - 10 = 0$; c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$]

47 Dati i vettori $\vec{a}(1; 3; 2)$ e $\vec{b}(-1; 4; 0)$, determina l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $2\vec{a} - 3\vec{b}$, esprimendo il risultato in gradi e approssimandolo ai secondi. [$98°\ 45'\ 34''$]

48 Verifica che i punti $A(2; 1; 0)$, $B\left(\frac{3}{2}; 3; 1\right)$, $C(1; 1; 0)$ e $D(2; 2; 3)$ individuano un poliedro $ABCD$ e calcolane il volume. $\left[\frac{5}{6}\right]$

49 Considera i punti $A(3; 0; 1)$, $B(5; -2; -3)$ e $C(-2; 4; 3)$.

a. Scrivi le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e per B.

b. Determina l'equazione del piano π perpendicolare alla retta r e passante per C.

c. Determina le coordinate del punto P di intersezione tra il piano π e la retta r.

$$\left[\text{a) } r: \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2k \\ z = 1 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R};\quad 6 - 2x = 2y = z - 1; \text{ b) } \pi: x - y - 2z + 12 = 0; \text{ c) } P\left(\frac{5}{6}; \frac{13}{6}; \frac{16}{3}\right)\right]$$

Dimostrazioni di geometria del piano

50 Nel triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ e indica con D la sua intersezione con il lato BC.

a. Dimostra che se il triangolo ADC è isoscele di base AC, allora ABD è simile ad ABC.

b. Indica con l la lunghezza di AC e trova BD in funzione di l. $\left[\text{b) } BD = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} l\right]$

51 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, traccia la bisettrice dell'angolo retto in A che incontra l'ipotenusa nel punto D.

a. Dimostra che $AB : BD = AC : CD$.
(SUGGERIMENTO Dal vertice C traccia la parallela alla bisettrice DA, fino a incontrare in E il prolungamento di AB.)

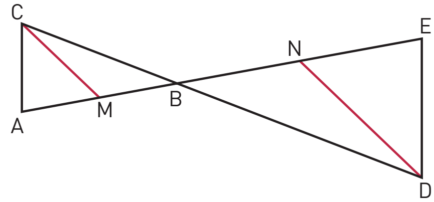
b. Usa tale risultato per calcolare il perimetro e l'area del triangolo ABC, sapendo che $BD = 30$ cm e $CD = 10$ cm.

[b) $2p = 8(2\sqrt{10} + 5)$ cm; $A = 240\ \text{cm}^2$]

52 In un rettangolo $ABCD$, le perpendicolari alle diagonali AC e BD passanti per i punti C e D incontrano i prolungamenti della base AB rispettivamente in Q e P. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti su AB e BC è equivalente a un triangolo di base AB e altezza congruente a $PQ + CD$.

53 Considera il triangolo ABC, rettangolo in A, e traccia la bisettrice AQ. Considera un punto P sul segmento BQ e costruisci P', simmetrico di P rispetto ad AQ, e P'', simmetrico di P' rispetto ad AC. Dimostra che il triangolo APP'' è rettangolo.

54 Nella figura, il segmento AC è parallelo a DE e M e N sono i punti medi dei segmenti AB e BE. Dimostra che le rette CM e ND sono parallele.



Problemi di sintesi

55 È data la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = (a - x^2)e^{-\frac{x}{2}}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

a. Determina per quali valori del parametro a il grafico della funzione $f_a(x)$:
- presenta dei punti di massimo e/o minimo relativi, e in che numero;
- presenta dei punti di flesso, obliquo e/o orizzontale, e in che numero.

b. Dimostra che al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo relativi e di flesso orizzontale descrivono la curva del grafico della funzione $g_1(x) = -4xe^{-\frac{x}{2}}$, e che i punti di flesso descrivono la curva del grafico della funzione $g_2(x) = 8(1-x)e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Ricava per quale valore di a il grafico della funzione $f_a(x)$ ha un punto di flesso appartenente all'asse x. Verificato che tale valore è $a = 1$, studia e rappresenta in uno stesso riferimento cartesiano i grafici delle funzioni $f_1(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$.

d. Siano t_1 e t_2 le rette tangenti al grafico di $f_1(x)$ nei punti A_1 e A_2 in cui tale grafico interseca l'asse delle ascisse. Determina l'area della regione di piano delimitata dalle rette t_1 e t_2 e dal grafico di $f_1(x)$ compreso tra i punti A_1 e A_2; utilizzando la calcolatrice, riporta il risultato anche come numero decimale approssimato al centesimo.

e. Calcola il limite:

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \int_1^k f_1(x)\,dx \right|.$$

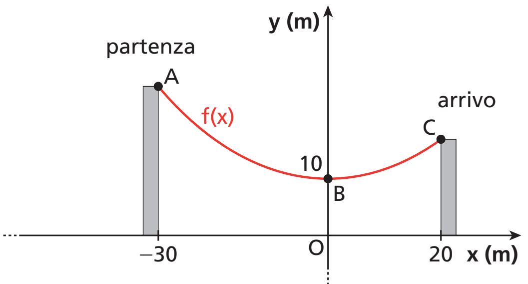
[a) $a \leq -8$: no max/min rel., no fl.; $-8 < a < -4$: no max/min rel., 2 fl. obl.; $a = -4$: no max/min rel., 1 fl. oriz., 1 fl. obl.; $a > -4$: 1 max rel., 1 min rel., 2 fl. obl.; c) $f_1(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x}{2}}$: max rel. $\left(2 - \sqrt{5}; (4\sqrt{5} - 8)e^{-\frac{2-\sqrt{5}}{2}}\right)$, min rel. $\left(2 + \sqrt{5}; (-4\sqrt{5} - 8)e^{-\frac{2+\sqrt{5}}{2}}\right)$, flessi $(1; 0)$, $\left(7; -48e^{-\frac{7}{2}}\right)$; $g_1(x)$: min rel. $(2; -8e^{-1})$, flesso $(4; -16e^{-2})$; $g_2(x)$: min rel. $\left(3; -16e^{-\frac{3}{2}}\right)$, flesso $\left(5; -32e^{-\frac{5}{2}}\right)$; d) t_1: $y = 2\sqrt{e}\,x + 2\sqrt{e}$; t_2: $y = -\frac{2}{\sqrt{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$; circa 0,41; e) $\frac{24\sqrt{e}}{e}$]

56 **REALTÀ E MODELLI** **Sospesi in aria** Il direttore di un parco acrobatico vuole costruire il "volo dell'angelo", una nuova attrazione per i clienti più spericolati.

Lo studio di progettazione ipotizza che il profilo della fune, quando non vi sono persone appese, possa essere modellizzato dalla funzione:

$$f(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) - \frac{2}{3k},$$

con $-30 \le x \le 20$ e $k > 0$. Nel punto B si ha un minimo assoluto per l'altezza da terra della fune.



a. Determina il valore del parametro k in modo che il grafico di $f(x)$ sia quello rappresentato in figura. Ricava poi l'altezza delle due torrette di partenza e di arrivo a cui è agganciata la fune, approssimando il risultato all'intero più vicino.

La "pendenza" $p(x)$ della fune è determinata dalla derivata prima della funzione $f(x)$.

b. Determina la pendenza della fune alla partenza e all'arrivo, indicando inoltre l'angolo che la retta tangente al grafico della funzione in questi punti forma con l'asse positivo delle ascisse.
Esiste un punto in cui la tangente al grafico di $f(x)$ forma un angolo di 45° con l'orizzontale? E un angolo di 135°?

c. Verifica che il punto di minimo $f(x)$ coincide con il punto di flesso di $p(x)$.
Basandoti solo sul grafico di $f(x)$, spiega perchè $p(x)$ è una funzione monotòna.

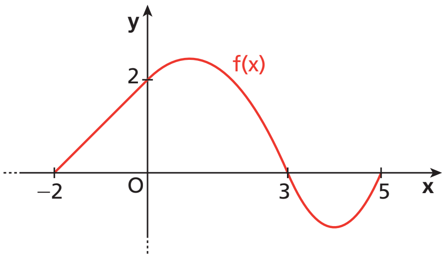
Il grafico della funzione $f(x)$ può essere approssimato mediante un arco di parabola $y = g(x)$.

d. Determina l'espressione analitica della funzione $g(x)$, il cui grafico passa per i punti A, B e C, usando i dati approssimati ricavati al punto **a**.
Oltre ad essere il minimo per $f(x)$, il punto B è anche il minimo per $g(x)$?
Determina poi il punto della parabola in cui la pendenza della retta tangente alla parabola stessa è uguale a quella della retta AC.

e. In un report di progetto dell'opera viene realizzato un grafico in scala 1:100 delle torrette e della fune. Valuta la differenza tra le due superfici sottese dal profilo della fune in questo grafico in scala, considerando che il profilo della fune sia descritto prima da $f(x)$ poi da $g(x)$.

[a) $k = \frac{1}{30}$; $f(x) = 15\left(e^{\frac{x}{30}} + e^{-\frac{x}{30}}\right) - 20$; $y_A \simeq 26$ m; $y_C \simeq 17$ m; b) circa 130,4°; circa 35,6°; angolo di 135° per $x \simeq -26,4$ m; d) $g(x) = \frac{53}{3000}x^2 - \frac{1}{300}x + 10$; B non è min per $g(x)$; $\left(-5; \frac{251}{24}\right)$; e) 3,82 cm^2]

57 **LEGGI IL GRAFICO** Il grafico in figura rappresenta la funzione $f(x)$, definita, continua e derivabile in $[-2; 5]$.
Il tratto del grafico compreso nell'intervallo $[-2; 0]$ è un segmento di retta, mentre i tratti compresi negli intervalli $[0; 3]$ e $[3; 5]$ sono rispettivamente archi di due distinte parabole con assi paralleli all'asse y.



a. Determina l'espressione di $f(x)$ e delle sue derivate prima e seconda, e traccia il grafico di queste ultime. Specifica qual è l'insieme immagine di $f(x)$ e stabilisci se il suo grafico presenta punti di flesso.

b. Stabilisci se la funzione $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 5]$ e, se le soddisfa, determina le ascisse dei punti in cui risulta verificata la tesi.

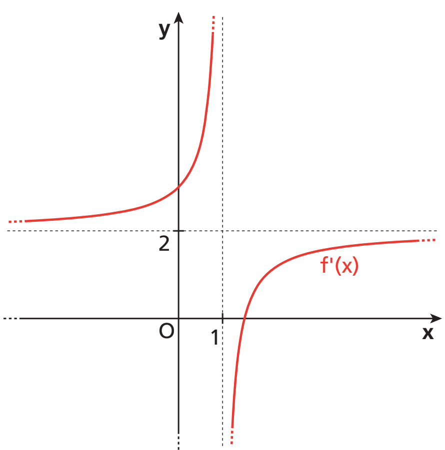
c. Sia $F(x)$ la funzione integrale di $f(x)$ in $[-2; 5]$. Rappresenta in modo plausibile il grafico di $F(x)$ in tale intervallo dopo aver determinato i valori $F(0)$, $F(3)$ e $F(5)$. Calcola il valor medio integrale della funzione $|f(x)|$ sempre nell'intervallo $[-2; 5]$.

d. Determina il volume V del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse x del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[-2; 3]$.

$$\left[\text{a) } f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } -2\le x<0 \\ -\frac{5}{9}x^2+x+2 & \text{se } 0\le x<3 \\ \frac{7}{6}x^2-\frac{28}{3}x+\frac{35}{2} & \text{se } 3\le x\le 5 \end{cases};\ Im(f)=\left[-\frac{7}{6};\frac{49}{20}\right];\ \text{punto di flesso: } x=3;\right.$$

$$\left.\text{b) } c_1=\frac{63}{50},\ c_2=\frac{134}{35};\ \text{c) } F(0)=2,\ F(3)=\frac{15}{2},\ F(5)=\frac{107}{18};\ \text{valor medio } \frac{163}{126};\ \text{d) } \frac{85}{6}\pi\right]$$

58 **LEGGI IL GRAFICO** La figura mostra il grafico della derivata di una funzione $f(x)$.



a. Individua, tra le seguenti, l'espressione della funzione rappresentata in figura, motivando adeguatamente la risposta:

1. $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$;
2. $f'(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$;
3. $f'(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$;
4. $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

b. Deduci, dal grafico di $f'(x)$, le caratteristiche del grafico della funzione primitiva.

c. Ricava l'espressione analitica della famiglia di funzioni $f_c(x)$ compatibili con il grafico di $f'(x)$.

Per qualcuna di queste funzioni è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[1; 3]$? Se sì, individua il punto assicurato dal teorema.
Tra le funzioni $f_c(x)$ trovate, scegli in particolare la funzione $f(x)$ il cui grafico passa per l'origine degli assi cartesiani. Studia la funzione $f(x)$ e rappresenta il suo grafico.

d. Calcola l'area sottesa al grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[0; 2]$.

$$\left[\text{a) } f'(x)=\frac{2x-3}{x-1};\ \text{c) } f(x)=2x-\ln|x-1|;\ \text{d) } 6\right]$$