SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

20 giugno 2019

Svolgimento

Problema 1

A La funzione $g(x)$ è il prodotto di una funzione polinomiale e una funzione esponenziale, quindi ha come dominio tutto $\mathbb{R}$, è continua e derivabile indefinitamente per ogni valore di x reale e non ammette asintoti verticali.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio, calcolando i limiti con il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{e^{x^2-2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{(2x-2)\,e^{x^2-2x}} = 0.$$

Essendo tale limite finito, l'asse x è asintoto orizzontale per la funzione $g(x)$, che quindi non può tendere all'infinito per nessun valore di x.

Per determinare i punti di massimo e minimo occorre calcolare la derivata prima della funzione:

$$g'(x) = ae^{2x-x^2} + (ax+b)(2-2x)\,e^{2x-x^2} = \left[-2ax^2 + 2(a-b)\,x + a + 2b\right] e^{2x-x^2}.$$

Essendo il fattore esponenziale sempre positivo, il segno di $g'(x)$ dipende unicamente dal fattore polinomiale di secondo grado. Per stabilire il suo segno, calcoliamo il determinante dell'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = (a-b)^2 + 2a\,(a+2b) = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a+b)^2\,.$$

Dovendo essere $a \neq 0$, osserviamo che il $\frac{\Delta}{4}$, esprimibile come somma di due quadrati, è una quantità necessariamente positiva. L'equazione associata ammette quindi due soluzioni reali e distinte, corrispondenti alle ascisse dei punti di massimo e minimo relativi della funzione $g(x)$, che sono anche punti di massimo e di minimo assoluti per le considerazioni precedenti.

Per determinare i valori di a e b richiesti, imponiamo il passaggio delle due funzioni per il punto $A(2;1)$:

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ (2a+b)\,e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 - 4a \\ 2a + 3 - 4a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

B Le funzioni sono:

$$f(x) = x^2 - x - 1,$$

$$g(x) = (x-1)\,e^{2x-x^2}.$$

La funzione $f(x)$ è una parabola che volge la concavità verso l'alto e ha vertice in $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$. Interseca l'asse x nei punti $C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ e $D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ e l'asse y nel punto $B\,(0;-1)$.

Come già osservato al punto precedente, la funzione $g(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per g.
I punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad B(0; -1)$$

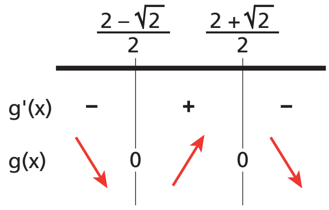
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x-1)\, e^{2x - x^2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \qquad E(1; 0).$$

Il segno della funzione $g(x)$ dipende solo dal segno del fattore polinomiale, quindi è positiva per $x > 1$.
Sfruttando il calcolo della derivata svolto nel punto precedente, risulta:

$$g'(x) = \left(-2x^2 + 4x - 1\right) e^{2x - x^2}.$$

Studiamo il segno di $g'(x)$, che dipende da quello del fattore polinomiale:

$$-2x^2 + 4x - 1 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$



I punti di minimo e di massimo assoluti hanno coordinate:

$$m\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right) \qquad M\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2e}}{2}\right).$$

Calcoliamo la derivata seconda di $g(x)$:

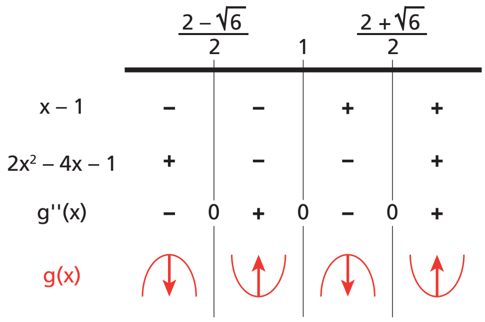
$$g''(x) = 2\left(2x^3 - 6x^2 + 3x + 1\right) e^{2x - x^2}.$$

Osserviamo che $g''(1) = 0$, quindi il polinomio cubico è divisibile per $(x - 1)$. Applicando Ruffini otteniamo:

$$g''(x) = 2\,(x - 1)\left(2x^2 - 4x - 1\right) e^{2x - x^2}.$$

Studiamo il segno di $g''(x)$, che dipende da quello dei fattori polinomiali:

$$(x - 1)\left(2x^2 - 4x - 1\right) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2 - \sqrt{6}}{2} < x < 1 \quad \vee \quad x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2}.$$



I punti di flesso della funzione g sono:

$$F_1\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6e}}{2e}\right)\qquad F_2\,(1;0)\qquad F_3\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2};+\frac{\sqrt{6e}}{2e}\right).$$

Osserviamo che i punti estremanti m e M della funzione g sono simmetrici rispetto al punto $F_2\,(1;0)$, così come i punti F_1 e F_3. Questo suggerisce che il grafico di $g(x)$ risulti simmetrico rispetto a F_2. Verifichiamolo con i calcoli.
Le equazioni della simmetria di centro $F_2\,(1;0)$ sono:

$$\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = -x'+2 \\ y = -y' \end{cases}$$

e le applichiamo alla funzione $y = g(x)$:

$$-y' = \left(-x'+2-1\right)e^{2(2-x')-(2-x')^2}$$

$$-y' = \left(-x'+1\right)e^{4-2x'-4-x'^2+4x'}$$

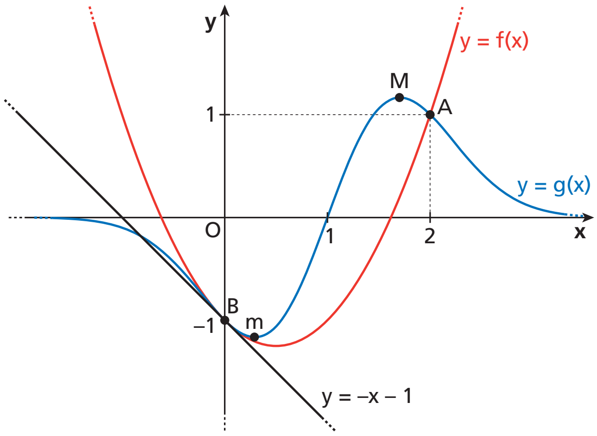
$$y' = \left(x'-1\right)e^{2x'-x'^2}$$

che coincide con $y = g(x)$.
Per verificare la tangenza nel punto $B\,(0;-1)$, osserviamo che entrambe le funzioni intersecano l'asse y nel punto B come trovato in precedenza. Calcoliamo i valori delle derivate delle due funzioni nel punto B.

$$f'(x) = 2x-1 \quad\Rightarrow\quad f'(0) = -1$$

$$g'(x) = \left(-2x^2+4x-1\right)e^{2x-x^2} \quad\Rightarrow\quad g'(0) = -1$$

Pertanto il punto B è di tangenza per $f(x)$ e $g(x)$ e l'equazione della tangente comune è
$y = -x-1$.



Determiniamo l'area della regione piana S delimitata dai grafici di f e g calcolando l'integrale definito:

$$\int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 \left[(x-1)\, e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1\right] dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \left[-\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{4}{3}.$$

C Per il calcolo della circuitazione $\Gamma(\overrightarrow{B})$ del campo magnetico generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3 lungo il contorno γ di S, utilizziamo il teorema della circuitazione di Ampère:

$$\Gamma_\gamma(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \sum_k i_k$$

dove la sommatoria è estesa alle sole correnti concatenate alla curva γ, cioè quelle che attraversano la superficie S.
Verifichiamo quali, tra le tre correnti, risultano concatenate a γ. Osservando il grafico di f e di g, occorre calcolare le ordinate delle funzioni per $x = \frac{3}{2}$ e confrontarle con le ordinate dei punti proposti.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{2} \simeq 1{,}06$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

Poichè $g\left(\frac{3}{2}\right) > 1$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) > -\frac{1}{2}$, le correnti concatenate a γ sono solo i_1 e i_2.
Per stabilire i segni delle correnti, stabiliamo un'orientazione per γ e la supponiamo antioraria. In questo modo, la corrente i_1 entrante risulta negativa.

$$\Gamma_\gamma(\overrightarrow{B}) = \mu_0\,(-2{,}0 + i_2)$$

Se il verso di i_2 è entrante, oppure uscente con $0\ \text{A} < i_2 < 2{,}0\ \text{A}$, la circuitazione è negativa.
Se il verso di i_2 è uscente e vale 2,0 A, la circuitazione è nulla.
Se il verso di i_2 è uscente e maggiore di 2,0 A, la circuitazione è positiva.

D Facendo ruotare la spira intorno all'asse x si genera una forza elettromotrice indotta, il cui valore si può calcolare utilizzando la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_S(\overrightarrow{B})}{dt}$$

dove, se assumiamo che a $t = 0$ la spira giaccia nel piano xy:

$$\Phi_S(\overrightarrow{B}) = BS\cos(\omega t).$$

Calcoliamo:

$$\text{fem} = -\frac{d\left[BS\cos(\omega t)\right]}{dt} = BS\omega\sin(\omega t).$$

Il suo valore massimo si ottiene se $\sin(\omega t) = 1$, per cui $\text{fem}_{\text{max}} = BS\omega$.
Sapendo che $i_{\text{max}} = 5{,}0$ mA e $R = 0{,}20\ \Omega$, per la prima legge di Ohm:

$$\text{fem}_{\text{max}} = i_{\text{max}}R$$

da cui:

$$\text{fem}_{\text{max}} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{V}.$$

Tenendo conto che $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T e che $S = \dfrac{4}{3}\ \text{m}^2$, si ha:

$$\omega = \frac{\text{fem}_{\text{max}}}{BS} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{V}}{\left(1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{T}\right)\left(\frac{4}{3}\ \text{m}^2\right)} = 0{,}050\ \text{rad/s}.$$

