SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
20 giugno 2019
Svolgimento del problema 2

A L'unità di misura di a è il secondo, per garantire la consistenza delle unità di misura nella somma $t^2 + a^2$.

Sostituiamo le unità di misura nell'espressione di B, indicando con x quella di k:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{s}}{\sqrt{(\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^2)^3}} \cdot \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

e quindi l'unità di misura di k è $\dfrac{\mathrm{T} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}$.

La differenza di potenziale variabile produce, tra le piastre del condensatore, un campo elettrico variabile, il quale, a sua volta, genera un campo magnetico, in accordo con il teorema di Ampère-Maxwell per la circuitazione $\Gamma(\vec{B})$ del campo magnetico. Nella regione compresa tra le armature, il teorema assume la seguente forma:

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

dove il termine al secondo membro è anche noto come corrente di spostamento i_s.

La direzione del campo elettrico $\vec{E}$ all'interno del condensatore è quella dell'asse di simmetria, che indichiamo con $\hat{x}$. Le linee del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono linee circolari concentriche, con centro sull'asse di simmetria, e giacciono su piani paralleli alle armature e perpendicolari all'asse di simmetria. Pertanto $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari in ogni punto.

B Sui punti della circonferenza C il campo magnetico ha modulo costante ed è tangente in ogni punto alla circonferenza. Pertanto la circuitazione di C vale

$$\Gamma(\vec{B}) = 2\pi r B = \frac{2\pi k t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r^2.$$

Dal teorema di Ampère-Maxwell ricaviamo:

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{\Gamma(\vec{B})}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}.$$

Pertanto

$$\Phi(\vec{E}) = \int \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c \right).$$

Poiché a $t = 0$ la d.d.p. tra le armature è nulla, dev'essere nullo anche il campo elettrico $\vec{E}$. Questa condizione consente di trovare il valore della costante di integrazione c:

$$\Phi(\vec{E})\Big|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + c\right]_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{a} + c\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{a}.$$

Quindi

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right).$$

Riscriviamo l'espressione del campo elettrico sfruttando la definizione del suo flusso attraverso la superficie delimitata dalla circonferenza C, di area $S = \pi r^2$:

$$\Phi(\vec{E}) = ES = E\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right) = E\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2k}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right).$$

Troviamo ora l'espressione della d.d.p.:

$$\Delta V = Ed = \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right).$$

Calcoliamo il limite di $|\vec{B}|$ per $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r = \lim_{t\to+\infty} kr \frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = \lim_{t\to+\infty} kr \frac{t}{t^3\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} kr \frac{1}{t^2\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3}} = 0,$$

in quanto

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)^3} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} = 0.$$

L'analisi dal punto di vista fisico è concorde con il risultato ottenuto: infatti la differenza di potenziale ΔV, al trascorrere del tempo, tende a un valore costante

$$\lim_{t\to+\infty} \Delta V = \lim_{t\to+\infty} \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right) = \frac{2k}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{d}{a},$$

per cui anche il campo elettrico tende a un valore costante, e la corrente di spostamento i_s tende a zero.

C Entrambe le funzioni $F(t)$ e $f(t)$ sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$. Deriviamo $F(t)$ rispetto a t, supponendo $a > 0$:

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}}2t = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = f(t)$$

Quindi $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$. Inoltre il suo grafico passa per l'origine, in quanto

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

Studiamo la funzione $F(t)$.

- Dominio: $t \in \mathbb{R}$.
- Segno: dal momento che $\sqrt{t^2+a^2} \geq \sqrt{a^2} = a$, risulta $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \dfrac{1}{a} \leq 0$, quindi $F(t)$ è negativa o nulla.
- Simmetrie: $F(t)$ è una funzione pari. Infatti:

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2+a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} = F(t)$$

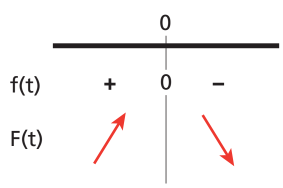
  Il suo grafico, quindi, è simmetrico rispetto all'asse y.
- Limiti:

$$\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$$

  Il grafico della funzione ha quindi un asintoto orizzontale $y = -\dfrac{1}{a}$ per $t \to \pm\infty$.
- Studiamo il segno della derivata di $F(t)$ per determinare dove $F(t)$ è crescente e dove è decrescente, e per determinare i suoi punti stazionari.
  Poichè $F'(t) = f(t)$, basta studiare il segno di $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad t < 0$$

  perché il denominatore è positivo per ogni $t \in \mathbb{R}$.



  Quindi $F(t)$ ha un punto di massimo in $M\,(0;0)$.
  Per trovare i punti di flesso di $F(t)$ calcoliamo la sua derivata seconda, cioè la derivata prima di $f(t)$:

$$F''(t) = f'(t) = -\frac{d}{dt}\left[t\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] = -\left[\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}} + t\left(-\frac{3}{2}\right)(2t)\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right] =$$

$$= -\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left[\left(t^2+a^2\right)-3t^2\right] = -\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(a^2-2t^2\right) = \frac{2t^2-a^2}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^5}}.$$

La derivata seconda $F''(t)$ si annulla in $t=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, che sono le ascisse dei punti di flesso.
I due punti sono simmetrici rispetto all'asse y e quindi hanno la stessa ordinata:

$$y_1 = y_2 = F\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{a} =$$

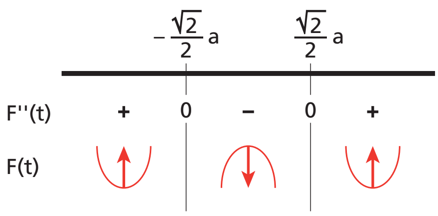
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}-3}{3a}.$$

Quindi:

$$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right) \qquad F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right).$$

Studiamo la concavità di $F(t)$:

$$F''(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2t^2-a^2>0$$



Le equazioni delle rette r e s tangenti al grafico di F nei punti di flesso F_1 e F_2 sono:

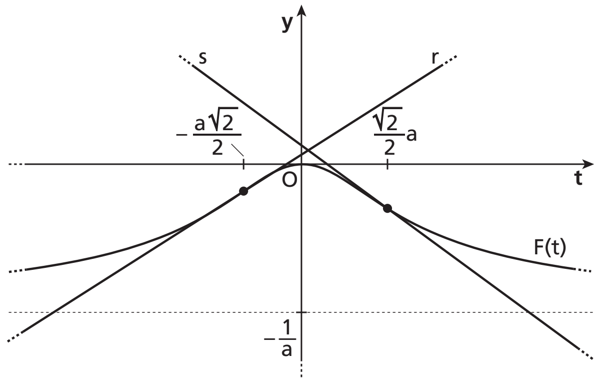
$$r: \quad y - y_{F_1} = f(t_{F_1})\left(t - t_{F_1}\right)$$

$$s: \quad y - y_{F_2} = f(t_{F_2})\left(t - t_{F_2}\right)$$

le cui pendenze sono:

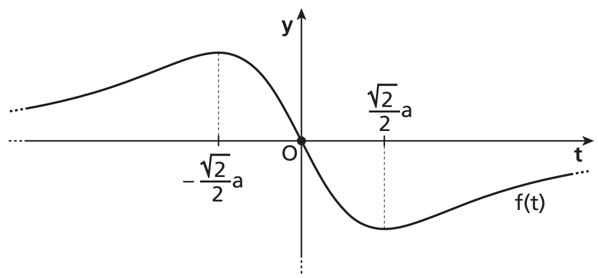
$$f(t_{F_1}) = -\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2+a^2\right)^3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{a^2}$$

$$f(t_{F_2}) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2+a^2\right)^3}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a^3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a^2} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{a^2}.$$



D Le ascisse t_{F_1} e t_{F_2} dei punti di flesso di F soddisfano la condizione $F''(t_{F_1}) = F''(t_{F_2}) = 0$, cioè $f'(t_{F_1}) = f'(t_{F_2}) = 0$; quindi tali ascisse sono le ascisse dei punti stazionari di $f(t)$. Riportiamo nel seguente schema i segni di $f(t)$ e $f'(t)$:

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	
f(t)	+		+	0	–		–
f'(t)	+	0	–		–	0	+



Per dedurre il grafico di $f(t)$ da quello di $F(t)$, notiamo che:

- $F(t)$ è strettamente crescente per $t \in]-\infty; 0[$, quindi $f(t)$ è positiva per $t \in]-\infty; 0[$.
- $F(t)$ è strettamente decrescente per $t \in]0; +\infty[$, quindi $f(t)$ è negativa per $t \in]0; +\infty[$.
- Il punto di massimo di $F(t)$ coincide con lo zero di $f(t)$.
- I punti di flesso del grafico di $F(t)$ corrispondono a punti stazionari di $f(t)$. In particolare in $t_{F_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ la funzione $f(t)$ ha un massimo relativo, e in $t_{F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ la funzione $f(t)$ ha un minimo relativo.
- Inoltre la funzione $F(t)$ tende a un valore finito per $t \to \pm\infty$, quindi $f(t)$ tende a 0 per $t \to \pm\infty$:
$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0.$$
- Infine la funzione $F(t)$ è pari, quindi $f(t)$ è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Dall'ultima proprietà si deduce che, per $b > 0$, ogni integrale della forma

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt$$

è nullo.

L'area della regione compresa tra gli assi, la retta $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e il grafico della funzione è

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)dt = F(0) - F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + a^2}} - \frac{1}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} = \frac{1}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Poiché la funzione $f(t)$ è simmetrica rispetto all'origine, l'area A' della superficie compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e $t = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ è pari al doppio dell'area appena calcolata:

$$A' = 2A = \frac{2}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$