SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

20 giugno 2019

Svolgimento

Quesito 1

La funzione $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse in $x_0 = 0$ e in $x_1 = \frac{12}{5}$, quindi $f(0) = f\left(\frac{12}{5}\right) = 0$.
Pertanto il polinomio $p(x)$ si fattorizza nella forma $p(x) = x\left(x - \frac{12}{5}\right)q(x)$, con $q(x)$ polinomio.
Il fatto che le rette di equazioni $x = -3$ e $x = 3$ siano asintoti verticali per la funzione implica che il denominatore di $f(x)$ si annulli per $x = -3$ e $x = 3$, quindi deve essere:

$$x^2 + d = (x+3)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x^2 + d = x^2 - 9.$$

Inoltre la retta di equazione $y = 5$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione, quindi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(x-\frac{12}{5}\right)q(x)}{x^2-9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{12}{5x}\right)q(x)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = 5 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} q(x) = 5.$$

Quindi deve essere $q(x) = 5$.
La funzione assegnata ha quindi espressione analitica:

$$f(x) = \frac{5x\left(x-\frac{12}{5}\right)}{x^2-9} = \frac{5x^2-12x}{x^2-9}.$$

La funzione è definita in $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$, continua e derivabile nel suo dominio.
Determiniamo i punti di minimo e massimo relativi mediante lo studio della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9)-(5x^2-12x)(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2} = \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2}$$

che ha lo stesso dominio di $f(x)$.
Il polinomio al numeratore si scompone in $2x^2 - 15x + 18 = (x-6)(2x-3)$ e la derivata prima ha espressione

$$f'(x) = \frac{6(x-6)(2x-3)}{(x^2-9)^2}.$$

Poiché il denominatore $(x^2-9)^2$ è sempre positivo nel dominio $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$, per studiare il segno di $f'(x)$ possiamo limitarci a studiare il segno del numeratore.
Costruiamo il quadro dei segni:

		-3		$\frac{3}{2}$		3		6	
$x-6$	−		−		−		−	0	+
$2x-3$	−		−	0	+		+		+
$f'(x)$	+	∄	+	0	−	∄	−	0	+
$f(x)$	↗		↗		↘		↘		↗
				massimo relativo				minimo relativo	

Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di minimo relativo in $x = 6$ e un punto di massimo relativo in $x = \frac{3}{2}$.
Calcoliamo le ordinate corrispondenti: $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ e $f(6) = 4$.