SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

20 giugno 2019

Svolgimento

Quesito 2

Riscriviamo la funzione $g(x)$:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1}=x+x^3+x^5+\ldots+x^{2019}=x\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2018}\right)$$

Risolviamo l'equazione

$$g(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2018}\right)=0 \quad \Rightarrow$$
$$x=0 \quad \vee \quad 1+x^2+x^4+\ldots+x^{2018}=0$$

La prima equazione ha come unica soluzione 0, mentre la seconda equazione è impossibile, poiché $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2018}>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, in quanto somma di quadrati. Quindi esiste ed è unico x_0 tale che $g(x_0)=0$ e in particolare $x_0=0$.

Determiniamo il valore di

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{1,1^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2019}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2018}}\right)}{1,1^x}.$$

Al numeratore $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2018}}$ tende a 1 per $x\to+\infty$ e quindi

$$\frac{x^{2019}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2018}}\right)}{1,1^x}\sim\frac{x^{2019}}{1,1^x}.$$

Per la gerarchia degli infiniti, $x^\beta<b^x$ per $x\to+\infty$ e per ogni $\beta>0, b>1$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2019}}{1,1^x}=0$$